KATASTROPHENTHEORIE NICHTLINEARER EULER–LAGRANGE–GLEICHUNGEN UND FEYNMAN'SCHER WEGINTEGRALE

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Gerhard Dangelmayr
aus Stuttgart

1979

KATASTROPHENTHEORIE
NICHTLINEARER EULER–LAGRANGE–GLEICHUNGEN
UND FEYNMAN'SCHER WEGINTEGRALE

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Gerhard Dangelmayr
aus Stuttgart

1979

Tag der mündlichen Prüfung:	21. März 1979
Dekan:	Prof. Dr. H. Mauder
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. W. Güttinger
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. M. Dal Cin

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Thom'sche Katastrophen- und Bifurkationstheorie wird auf unendlich-dimensionale Räume und Funktionale erweitert. Damit wird gezeigt, daß sich die Lösungen von Euler-Lagrange-Gleichungen aus den stationären Punkten der Entfaltung einer Singularität bestimmen und sich die Bifurkationsphänomene dieser Lösungen sowie deren Stabilitätseigenschaften durch Katastrophenpolynome beschreiben und klassifizieren lassen. Die Ergebnisse werden unter anderem auf die Biegung von Stäben in der nichtlinearen Elastomechanik angewandt. Ferner wird gezeigt, daß die Kaustiken der klassischen Mechanik Bifurkationsmengen von Katastrophenpolynomen sind. In Erweiterung dieser Theorie wird im Rahmen der Quantenmechanik eine semiklassische Approximation des Feynman-Wegintegrals abgeleitet, die -- im Gegensatz zu konventionellen Approximationen -- in konjugierten Punkten und auf Kaustiken endlich bleibt, nahe bei diesen das experimentell beobachtete oszillatorische Verhalten aufweist und entfernt davon in die konventionellen Formeln übergeht. Dieses approximative Wegintegral ist proportional zu einem verallgemeinerten Airy-Integral, das durch ein Thom'sches Katastrophenpolynom bestimmt ist. Die Bifurkationseigenschaften des Katastrophenpolynoms entsprechen jenen der Euler-Lagrange-Gleichungen. Diese Ergebnisse werden am Beispiel des quantisierten anharmonischen Oszillators illustriert.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41536519_0056

INHALT

EINLEITUNG.....1

TEIL I

SINGULARITÄTEN IN NICHTLINEAREN EULER-LAGRANGE-GLEICHUNGEN

1. ENTFALTUNGEN VON SINGULARITÄTEN.....4

1.1 Qualitative Singularitätentheorie.....4

1.2 Definitionen und Theoreme aus der Singularitätentheorie.....6

2. KATASTROPHENTHEORIE NICHTLINEARER OPERATORGLEICHUNGEN.....11

2.1 Differentialkalkül in Banachräumen.....11

2.2 Katastrophentheorie bei Gradientenoperatoren.....13

2.3 Beispiele.....20

2.4 Stabilitätsanalyse der Bifurkationslösungen.....28

3. DIFFERENZIERBARKEITSEIGENSCHAFTEN VON FUNKTIONALEN UND OPERATOREN IN SOBOLEW-RÄUMEN.....31

3.1 Eigenschaften Sobolew'scher Räume.....31

3.2 Differenzierbarkeit von Operatoren zwischen L_p-Räumen.....33

3.3 Funktionale und Operatoren auf Sobolew-Räumen.....39

4. KATASTROPHENTHEORIE ELLIPTISCHER EULER-LAGRANGE-GLEICHUNGEN MIT DIRICHLET'SCHEN RANDBEDINGUNGEN.....44

4.1 Elliptische, selbstadjungierte Systeme linearer partieller Differentialoperatoren mit Dirichlet'schen Randbedingungen.....44

4.2 Aufspaltung spezieller Funktionale in einen quadratischen und einen endlich-dimensionalen singulären Anteil.....46

4.3 Katastrophentheorie allgemeiner elliptischer Euler-Lagrange-Gleichungen mit Dirichlet'schen Randbedingungen.....48

5. BIEGUNG VON STÄBEN.....51

5.1 Formulierung des Randwertproblems.....51

5.2 Einfache Entartung.....53

5.3 Zweifache Entartung.....59

6. ANWENDUNG AUF DIE NICHTGLEICHGEWICHTSTHERMODYNAMIK.....68

TEIL II

SEMIKLASSISCHE APPROXIMATION DES FEYNMAN-WEGINTEGRALS IN DER UMGEBUNG EINER KAUSTIK MITTELS KATASTROPHEN

7. WIRKUNGSFUNKTIONAL DER KLASSISCHEN MECHANIK IN EINER UMGEBUNG KONJUGIERTER PUNKTE ALS ENTFALTUNG VON SINGULARITÄTEN.....72

7.1 Konjugierte Punkte und Kaustiken.....72

7.2 Darstellung des Wirkungsfunktionals in einer Umgebung von konjugierten Punkten.....73

7.3 Beispiel: Der anharmonische Oszillator.....79

8. ENDLICHE SEMIKLASSISCHE APPROXIMATION DES FEYNMAN-WEGINTEGRALS IN EINER UMGEBUNG KONJUGIERTER PUNKTE.....85

8.1 Lineare Euler-Lagrange-Gleichungen, ein Theorem von Levit und Smilansky.....87

8.2 Definition des Weg-Integrals durch Integration über Fourier-Koeffizienten.....91

8.3 Semiklassische Approximation in der Nähe konjugierter Punkte....94

8.4 Beispiele.....111

SCHLUSSBEMERKUNGEN.....115

ANHANG.....117

LITERATUR.....120

VERZEICHNIS DER VERWENDETEN SYMBOLE.....125

EINLEITUNG

Viele in Natur und Technik auftretende komplexe Strukturen und Systeme bewahren ihre Qualität gegenüber kleinen Störungen -- sie sind strukturstabil. Nach grundlegenden Überlegungen von R. Thom [1] sind solche Systeme nur weniger, plötzlicher qualitativer Verhaltens- oder Strukturänderungen fähig, der sogenannten Katastrophen oder Bifurkationen. Kritische Phänomene verschiedenster Genese in Physik, Biologie und Technik lassen sich damit qualitativ und quantitativ auf einen gemeinsamen geometrischen Nenner bringen und klassifizieren [2]: Die Thom'schen Entdeckungen, die von Arnold [3] erweitert wurden, bilden daher eine "topologische Theorie von Analogien".

Die qualitative Beschreibung komplexer Systeme mit geometrischen Methoden geht auf H. Poincare gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts zurück. Hieraus entwickelte sich die heutige abstrakte Topologie, aber es dauerte ein Jahrhundert, bis der französische Topologe R. Thom zu deren intuitiven geometrischen Wurzeln zurückkehrte und mit der Katastrophentheorie eine fundamentale und universell gültige Theorie für das Verhalten komplexer Systeme konzipierte und zeigte, daß Strukturänderungen in den verschiedensten komplexen Systemen auf die Geometrie einiger weniger "Katastrophen" zurückgeführt werden können.

Im elementarsten Fall ist das Konzept der Katastrophentheorie intuitiv verständlich: Gegeben sei ein physikalisches System, das durch Zustandsvariable $X = (X_1,\ldots,X_N) \in \mathbb{R}^N$ und äußere Kontrollparameter $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ beschrieben wird. Die möglichen Zustände des Systems seien durch die stationären Punkte einer Potentialfunktion $V: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeben, d.h. das System nehme zu gegebenem λ einen Zustand X_λ auf der"Zustandsfläche" $Z_V := \{(X,\lambda) \mid \nabla_X V(X,\lambda)=0\}$ an. Von besonderem Interesse sind jene λ-Werte, für die das System seinen Zustand diskontinuierlich ändert. Diese sind durch die Bifurkationsmenge $\Sigma_V := \{\lambda \in \mathbb{R}^k \mid \nabla_X V=0,\ H=\det \partial^2 V/\partial X \partial X = 0\}$ bestimmt. R. Thom zeigte, daß generischerweise Zustandsfläche und Bifurkationsmenge von V zu der Zustandsfläche Z_f und Bifurkationsmenge Σ_f einer gewissen Normalform ("Katastrophenpolynom") $f=f(x,d)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^r$, $m \leqslant N$, $r \leqslant k$, äquivalent sind. Im allgemeinen sind m und r wesentlich kleiner als N und k, so daß sich die Untersuchung von Z_f und Σ_f wesentlich einfacher gestaltet als die von Z_V und Σ_V. Die Normalformen f lassen sich in einer Liste von Katastrophen zusammenfassen, die eine Klassifizierung der überhaupt möglichen Zustandsänderungen komplexer Systeme liefert.

Anwendungen der Katastrophentheorie blieben jedoch bislang auf endliche N beschränkt. Falls der Raum der Ordnungsparameter X von unendlicher Dimension ist (was bei vielen physikalischen Problemen, z.B. in der Elastizitätstheorie, der Fall ist), können die Klassifikationsaussagen der Katastrophentheorie zunächst nicht unmittelbar verwendet werden.

Erstes Ziel der vorliegenden Arbeit ist daher die Erweiterung der Katastrophentheorie auf Funktionale in Hilbert- und Banachräumen, insbesondere in Funktionenräumen. Diesem Gegenstand und Anwendungen hierzu ist Teil I gewidmet.

In Kap. 1 werden die wichtigsten Ergebnisse der Theorie der Entfaltungen von Singularitäten zusammengestellt, welche die mathematische Grundlage der Katastrophentheorie bildet. In Kap. 2 werden nichtlineare Funktionale $\mathfrak{A}$ auf Hilbert- bzw. Banachräumen untersucht, die von äußeren Parametern $\lambda \in \mathbb{R}^k$ abhängen. Es wird gezeigt, daß die "stationären Punkte" von $\mathfrak{A}$ eindeutig durch die stationären Punkte einer auf einem endlich dimensionalen Raum definierten Funktion $g(y, \lambda)$, $y \in \mathbb{R}^m$, bestimmt sind. Auf g kann der Formalismus der "endlich dimensionalen Katastrophentheorie" angewandt werden, so daß sich deren Klassifikationsaussagen auf $\mathfrak{A}$ übertragen lassen. In Kap. 3 werden Differenzierbarkeitseigenschaften von Funktionalen und Operatoren auf Sobolew-Räumen untersucht. In Kap. 4 wird gezeigt, daß sich das Bifurkationsverhalten von Euler-Lagrange-Gleichungen durch die erwähnte Funktion g und daher durch Katastrophen beschreiben läßt. Diese Ergebnisse werden in Kap. 5 bei der Biegung von Stäben mit nichtlinearer rücktreibender Kraft angewendet. Für bestimmte äußere Parameter läßt sich das Bifurkationsverhalten des Stabes auf die Doppelcusp-Katastrophe zurückführen. Die Bedeutung dieser Überlegungen für die Thermodynamik irreversibler Prozesse wird in Kap. 6 untersucht.

In Teil II der Arbeit werden die Ergebnisse von Kap. 2 auf klassische Mechanik und Quantenmechanik angewandt. Das Wirkungsfunktional der klassischen Mechanik wird in Kap. 7 als Funktional über einem geeigneten Hilbertraum derart formuliert, daß Randbedingungen, die an die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung zu stellen sind, die Rolle äußerer Parameter übernehmen. Es wird gezeigt, daß die Kaustiken der klassischen Mechanik Bifurkationsmengen der Entfaltungen von Singularitäten sind und daher durch die Katastrophentheorie klassifiziert werden können. In Kap. 8 werden diese Ergebnisse zur Aufstellung einer semiklassischen Approximationsformel für den durch ein Feynman-Wegintegral dargestellten quantenmechanischen Propagator benützt, die in konjugierten Punkten, d.h. auf Kaustiken endlich bleibt. Die Approximationsformel wird durch ein verallgemeinertes Airy-Integral mit einem Katastrophenpolynom im Exponent des Integranden repräsentiert.

TEIL I:

SINGULARITÄTEN IN NICHTLINEAREN EULER-LAGRANGE-GLEICHUNGEN

1. ENTFALTUNGEN VON SINGULARITÄTEN

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Ergebnisse der Singularitätentheorie zusammengefaßt. In Kap.1.1 wird die Singularitätentheorie qualitativ beschrieben. Die grundlegenden Definitionen und Theoreme werden in Kap.1.2 zusammengestellt.

1.1 Qualitative Singularitätentheorie

Gegeben sei eine reellwertige Funktion $V(X,\lambda):=V_\lambda(X)$, $X\in\mathbb{R}^N$, $\lambda\in\mathbb{R}^k$ mit $V(0,0)=0$ und $\nabla_X V(0,0)=0$. $X=0$ ist also ein stationärer Punkt von $V_0(X):=V(X,0)$. Definiert man $\Delta V(X,\lambda):=V(X,\lambda)-V_0(X)$, so kann in $V_\lambda(X)=V_0(X)+\Delta V_\lambda(X)$ die Größe $\Delta V_\lambda(X):=\Delta V(X,\lambda)$ als k-parametrige Störung von V_0 interpretiert werden. In der Singularitätentheorie befaßt man sich mit der Frage, welche Störungen von V_0 lokal um $X=0$ überhaupt auftreten können. Zum Beispiel verhält sich die Funktion $V_0(X)=X^2+a_3X^3+\ldots$ lokal um $X=0$ ($X\in\mathbb{R}$) wie eine Parabel. Setzt man $\Delta V(X,\lambda):=2\lambda X$ ($\lambda\in\mathbb{R}$), so bewirkt diese Störung für kleine λ lediglich eine Verschiebung der Parabel ($V(X,\lambda)=-\lambda^2+(X-\lambda)^2+\ldots$), d.h. die"gestörte Funktion" $V_\lambda(X)$ verhält sich qualitativ wie V_0. Dieses Beispiel ist ein Spezialfall der Morse-Theorie: Sei $J(X,\lambda):=\partial^2V(X,\lambda)/\partial X\partial X$ die Jacobi-Matrix von $V(X,\lambda)$, $X\in\mathbb{R}^N$, $\lambda\in\mathbb{R}^k$, und sei die Hesse'sche Determinante $H:=\det J(0,0)$ von Null verschieden. Dann kann stets lokal um $X=0$ ein neues Koordinatensystem eingeführt werden, so daß $V_0(X)$ in den neuen Koordinaten eine nichtentartete quadratische Form ist, $V_0(X)=X_1^2+\ldots+X_j^2-X_{j+1}^2-\ldots-X_N^2$. Dabei ist j die Anzahl der positiven Eigenwerte der Jacobi-Matrix $J(0,0)$. Daß die Störung $\Delta V(X,\lambda)$ nichts an dieser Normalform ändert, ist leicht einzusehen: Nach dem Satz über implizite Funktionen kann das Gleichungssystem $\nabla_X V(X,\lambda)=0$ eindeutig nach $X=X_0(\lambda)$ aufgelöst werden, V läßt sich daher schreiben als $\tilde V(X,\lambda):=V(X,\lambda)-V(X_0(\lambda),\lambda)=\sum_{i,j=1}^N J_{ij}(X_0(\lambda),\lambda)\,XY_iY_j$ + (Terme höherer Ordnung als zwei in den $Y_i:=X_{0i}(\lambda)-X_i$). Da aus Stetigkeitsgründen die Matrix $J(X_0(\lambda),\lambda)$ dieselbe Anzahl positiver und negativer Eigenwerte besitzt wie $J(0,0)$, kann V_λ auf dieselbe Normalform transformiert werden wie V_0. Die Störung ändert daher nichts an der qualitativen Form von V_0. Eine andere Situation liegt vor bei der Funktion $V_0(X)=X^3$ ($X\in\mathbb{R}$). Setzt man $\Delta V_\lambda(X)=\lambda X$, so besitzt $V_\lambda=V_0+\Delta V_\lambda$ für positives λ kein Extremum, während für negatives λ zwei Extrema existieren. V_λ ändert daher seine qualitative Form beim Übergang von positivem zu negativem λ (Fig. 1). Es ist unmittelbar einzusehen, daß alle möglichen Störungen von V_0 in der einparametrigen Familie V_λ enthalten sind; ist z.B. $\Delta V(X,\lambda,\mu_2,\mu_3,\ldots)=\lambda X+\mu_2X^2+\mu_3X^3+\ldots$ irgendeine mehrparametrige Störung von V_0, so können alle additiven Terme μ_jX^j ($j\geq 3$) gegenüber V_0 vernachlässigt werden, während sich der quadratische Term durch eine Translation entfernen läßt. Alle möglichen Störungen von V_0 sind somit in der

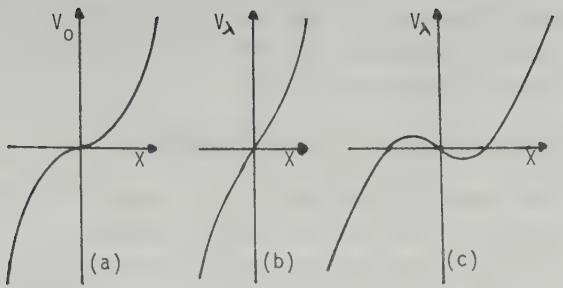


Fig. 1: Der Graph von $V_\lambda(X)=X^3+\lambda X$ für a) $\lambda=0$, b) $\lambda>0$, c) $\lambda<0$.

einparametrigen Familie $V(X,\lambda)=X^3+\lambda X$ enthalten.

Allgemein nennt man eine Funktion $V_0(X)$ $(X\in\mathbb{R}^N)$ mit $V_0(0)=0$, $\nabla_X V_0(0)=0$, eine Singularität. Jede Funktion $V(X,\lambda)$ $(\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in\mathbb{R}^k$, $V(X,0)=V_0(X))$ nennt man eine k-parametrige Entfaltung der Singularität V_0, die λ_j heißen Entfaltungsparameter. Eine wichtige Größe in der Singularitätentheorie ist die Codimension $\mathrm{codim}V_0$ von V_0. Anschaulich gibt die Codimension die minimale Anzahl von Entfaltungsparametern an, die benötigt wird, um alle möglichen Störungen von V_0 als Entfaltung zu erfassen. Die Codimension von Singularitäten V_0 mit nichtverschwindender Hesse'scher Determinante ist Null, da jede Entfaltung dieselbe Normalform wie V_0 besitzt. Die Codimension der kubischen Singularität $V_0(X)=X^3$ ist Eins, denn alle Störungen von V_0 sind in der einparametrigen Entfaltung $V(X,\lambda)=X^3+\lambda X$ enthalten. Man nennt eine Entfaltung $V(X,\lambda)$ von $V_0(X)$ $(X\in\mathbb{R}^N,\ \lambda\in\mathbb{R}^k)$ versell, wenn V alle möglichen Störungen von V_0 enthält. Gilt zuätzlich $\mathrm{codim}V_0=k$, so heißt V eine universelle Entfaltung von V_0. Die Singularitätentheorie befaßt sich mit der Klassifikation von Singularitäten und deren verseller Entfaltungen. Um überhaupt klassifizieren zu können, muß zunächst eine Äquivalenzrelation eingeführt werden: Man nennt eine Entfaltung $V(X,\lambda)$ von $V_0(X)$ $(X\in\mathbb{R}^N$, $\lambda\in\mathbb{R}^k)$ äquivalent zu der Entfaltung $U(Y,\mu)$ von $U_0(Y)$ $(Y\in\mathbb{R}^N,\mu\in\mathbb{R}^k)$, wenn V aus U durch eine hinreichend oft differenzierbare Koordinatentransformation $(X,\lambda)\longrightarrow(Y,\mu)=(Y(X,\lambda),\mu(\lambda))$ hervorgeht. Man läßt also nur solche Koordinatentransformationen zu, bei denen die neuen Entfaltungsparameter μ nur von den Entfaltungsparametern λ, jedoch nicht von den "Ordnungsparametern" oder "Zustandsvariablen" X abhängen. Dies hat zur Folge, daß die Bifurkationsmenge Σ_V von V, definiert durch $\Sigma_V := \{\lambda\in\mathbb{R}^k \mid \nabla_X V=0,\ \det J=0\}$, umkehrbar eindeutig auf die Bifurkationsmenge Σ_U von U abgebildet wird. Falls U die Form $U(Y,\mu)=U_1(Z,\mathbf{x})+Q(Z')$ besitzt, wobei $Z=(Y_1,\ldots,Y_n)$, $Z'=(Y_{n+1},\ldots,Y_N)$ $(n\leq N)$, $\mathbf{x}=(\mu_1,\ldots,\mu_r)$ $(r\leq k)$, und $Q(Z')$ eine nichtentartete quadratische Form ist, sagt man, "V reduziert sich auf U_1". Das Hauptproblem der Klassifikation von Singularitäten besteht darin, zu gege-

benem V die einfachste Funktion U_1 aufzufinden, auf die V reduziert werden kann. Die grundlegenden Ergebnisse der Singularitätentheorie sind das Klassifikationstheorem von Thom (Theorem 1.8) und zwei weiterführende Klassifikationstheoreme von Arnold (Theoreme 1.9, 1.10).

1.2 Definitionen und Theoreme aus der Singularitätentheorie

Sei f eine beliebig oft stetig differenzierbare Abbildung von einer Menge $U_f \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^p$. Interessiert man sich nur für die lokalen Eigenschaften von f in einer Umgebung von $x \in U_f$, so kann man anstelle von f jede beliebige Funktion $g: U_g \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x \in U_g \subset \mathbb{R}^n$ betrachten, falls diese in einer Umgebung von x mit f übereinstimmt. Dies gibt Anlaß zu der folgenden Definition: (f,U_f) ist äquivalent zu (g,U_g) bei $x \in \mathbb{R}^n$, falls es eine Umgebung V von x gibt mit $V \subset U_f \cap U_g$, so daß $f|_V = g|_V$. Eine Äquivalenzklasse dieser Relation nennt man einen Keim bei x. Mit $\mathcal{E}(n,p)$ werde die Menge aller Keime bei x=0 bezeichnet. $\mathcal{E}(n,p)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die Teilmenge $L(n) \subset \mathcal{E}(n,n)$ ist die Gruppe der Keime der lokalen Diffeomorphismen bei x=0, d.h.

$$L(n) := \{\varphi \in \mathcal{E}(n,n) \mid \varphi(0)=0, \ \varphi \text{ ist nicht singulär bei } x=0\}.$$

Für p=1 schreibt man $\mathcal{E}(n,1)= \mathcal{E}(n)$. $\mathcal{E}(n)$ besitzt eine natürliche $\mathbb{R}$-Algebra-Struktur und $\mathcal{E}(n)$ als (kommutativer) Ring besitzt das eindeutige maximale Ideal m(n), die Menge aller Keime f(x) mit f(0)=0. Jedes $f \in m(n)^2$ nennt man eine Singularität. Sei $g \in \mathcal{E}(n)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Der k-jet $j^k g(x)$ von g ist das k-te Taylorpolynom von g bei x=0. Die Menge $J^k(n)$ aller k-jets ist isomorph zu $\mathcal{E}(n)/m(n)^{k+1}$.

Endlich bestimmte Keime: Zwei Keime $f,g \in m(n)$ heißen äquivalent ($f \sim g$), wenn es ein $\varphi \in L(n)$ gibt mit $f=g\circ\varphi$. (Wie üblich wird das Symbol "$\circ$" für Kompositionsabbildungen verwendet.) $f \in m(n)$ heißt k-bestimmt, wenn jedes $g \in m(n)$ mit $j^k f = j^k g$ äquivalent zu f ist. $j^k f$ heißt der hinreichende k-jet von f. Eine hinreichende Bedingung für k-Bestimmtheit liefert ein Theorem von Mather [4]:

Theorem 1.1. $f \in m(n)$ ist k-bestimmt, wenn

$$m(n)^k \subseteq m(n)\langle \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n \rangle_{\mathcal{E}(n)} + m(n)^{k+1} \text{ gilt.}$$

Das nächste Theorem liefert eine notwendige Bedingung für k-Bestimmtheit [5-7]:

Theorem 1.2. Ist $f \in m(n)$ k-bestimmt, so gilt $m(n)^{k+1} \subseteq m(n)\langle \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n \rangle_{\mathcal{E}(n)}$.

Die Codimension codimf von $f \in m(n)^2$ wird definiert durch

$$\text{codimf} := \dim_{\mathbb{R}} m(n)/\langle \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n \rangle_{\mathcal{E}(n)}.$$

Diese Definition ist sinnvoll, da $\partial f/\partial x_i \in m(n)$ für $f \in m(n)^2$. Eine Rechtfertigung der Bezeichnung "Codimension" ergibt sich aus der Tatsache, daß codimf die Codimension des Orbits von f in $m(n)^2/m(n)^{k+1}$ unter der Gruppe L(n) ist, falls $0 \leqslant \text{codimf} \leqslant k-2$ [4,5]. Die Codimension von f ist endlich g.d.w. f endlich bestimmt ist [5].

Verselle Entfaltungen: Sei $f \in m(n)$. Ein Keim $F \in m(n+r)$ heißt eine Entfaltung von f, wenn $F(x,0)=f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Man kann sich F als eine r-parametrige Familie von Keimen aus $\mathcal{E}(n)$ vorstellen. r heißt die Codimension der Entfaltung F. Daher wird auch (F,r) für F geschrieben. Die Summe (H,r+s) zweier Entfaltungen (F,r), (G,s) von f ist definiert durch:

$$H(x,u,v) := F(x,u) + G(x,v) - f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^r, \; v \in \mathbb{R}^s.$$

Die konstante Entfaltung (C,r) von $f \in m(n)$ ist erklärt durch $C(x,u)=f(x)$.

Es seien (F,r), (G,s) Entfaltungen von $f \in m(n)$. Ein Morphismus von F nach G ist ein Tripel (ϕ,ψ,α), so daß

$$\Phi \in \mathcal{E}(n+r,n+s), \quad \Phi|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = \mathrm{id}, \quad \psi \in \mathcal{E}(r,s) \text{ mit } \pi_r \circ \Phi = \psi \circ \pi_s, \alpha \in \mathcal{E}(r),$$

und $F=G\circ\Phi+\alpha\circ\pi_r$, wobei π_r, π_s, die natürlichen Projektionen $\mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R}^r$, $\mathbb{R}^{n+s} \to \mathbb{R}^s$ sind. Ein Morphismus von (F,r) nach (G,r) heißt Isomorphismus, wenn $\Phi \in L(n+r)$. Eine Entfaltung (F,r) von $f \in m(n)$ heißt versell (oder stabil), wenn jede Entfaltung von f durch einen geeigneten Morphismus von (F,r) induziert wird. Eine verselle Entfaltung mit minimalem r heißt universell. Der Hauptsatz über universelle Entfaltungen stammt von Mather (vgl. [6]):

Theorem 1.4. Sei $f \in m(n)$. Dann gilt: (1) f besitzt eine verselle Entfaltung g.d.w. $\mathrm{codim} f < \infty$. (2) Zwei r-parametrige verselle Entfaltungen sind isomorph. (3) Jede verselle Entfaltung (G,s) ist isomorph zu (F,r)+(C,s-r), wobei (F,r) universell ist. (4) Ist $\{b_1,\ldots,b_r\} \subset m(n)$ eine Basis von $m(n)/\langle \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n \rangle_{\mathcal{E}(n)}$, so ist $F(x,u) := \sum_{i=1}^r u_i b_i(x) + f(x)$ eine universelle Entfaltung.

Ob eine Entfaltung versell ist, kann mit Hilfe des folgenden Kriteriums überprüft werden:

Theorem 1.5 ([5-7]). Es sei (F,r) eine Entfaltung von $f \in m(n)$ und f sei k-bestimmt. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum V_F sei definiert durch

$$V_F := \left\{ \sum_{i=1}^r a_i \partial F/\partial u_i|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} + a_o \;\middle|\; a_j \in \mathbb{R}, \; 0 \leq j \leq r \right\}.$$

Dann ist (F,r) versell g.d.w. $\mathcal{E}(n) = \langle \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n \rangle_{\mathcal{E}(n)} + V_F + m(n)^{k+1}$.

Das nächste Theorem ist von Bedeutung für die gleichförmige Approximation oszillierender Integrale, die bei der semiklassischen Approximation Feynman'scher Wegintegrale (Kap. 8) auftreten:

Theorem 1.6 ([8]). Es sei (F,r) eine Entfaltung von $f \in m(n)$. Dann ist F versell g.d.w. $\mathcal{E}(n+r) = \langle \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n \rangle_{\mathcal{E}(n+r)} + \langle \partial f/\partial u_1, \ldots, \partial f/\partial u_r \rangle_{\mathcal{E}(r)} + \mathcal{E}(r)$.

Klassifikation von Singularitäten: Es seien $F,G \in \mathcal{E}(n+r)$. F,G heißen äquivalent als Entfaltungen, falls es ein Tripel (ϕ,ψ,α) gibt mit

$$\phi \in L(n+r), \; \alpha \in \mathcal{E}(r), \; \psi \in L(r) \text{ mit } \pi_r \circ \phi = \psi \circ \pi_r,$$

so daß $F=G\circ\phi+\alpha\circ\pi_r$.

Theorem 1.7 ([5,7]). Sei $(F,r+s)$ eine verselle Entfaltung von $f\in m(n)$ und (G,r) eine verselle Entfaltung von $g\in m(n)$. Ist $f\sim g$, so ist F als Entfaltung äquivalent zu $\hat{G}$, wobei die Entfaltung $\hat{G}$ von g definiert ist durch $(\hat{G},r+s)=(G,r)+(C,s)$.

Nach Theorem 1.7 ist jede verselle Entfaltung F einer Singularität f äquivalent zu der versellen Entfaltung G einer Singularität g, falls nur $f\sim g$. Falls insbesondere $g(x_1,\ldots,x_n)=g_1(x_1,\ldots,x_{n'})+Q(x_{n'+1},\ldots,x_n)$, wobei $g_1\in m(n')^2$ $(n'\leq n)$ und $Q\in m(n-n')^2$ eine nichtentartete quadratische Form ist, sagt man "f, bzw. F reduziert sich auf g_1, bzw. G". Definiert man die Klasse $[f]$ durch $[f]:=\{g\in m(n)^2 \mid f\sim g\}$, so können alle versellen Entfaltungen von Singularitäten aus $[f]$ durch die universelle Entfaltung eines Repräsentanten von $[f]$ klassifiziert werden, wobei man natürlich den Repräsentanten auswählt, der eine möglichst einfache analytische Form besitzt. Die Aufteilung der Singularitäten in verschiedene Äquivalenzklassen impliziert somit eine Klassifikation der Singularitäten sowie deren verseller Entfaltungen. Das Klassifikationstheorem von Thom unterscheidet alle Singularitäten mit Codimension kleiner oder gleich vier:

Theorem 1.8 ([5-7]). Sei $f\in m(n)^2$ und $\operatorname{codim} f\leq 4$. Dann ist f entweder äquivalent zu einer nichtentarteten quadratischen Form, oder f reduziert sich auf eine Singularität $\mathcal{H}$ aus der folgenden Liste der sogenannten Elementarkatastrophen:

Bezeichnung	$\mathcal{H}$	universelle Entfaltung	Codimension
fold	x^3	$\mathcal{H}(x)+ux$	1
cusp	x^4	$\mathcal{H}(x)+ux^2+vx$	2
false cusp	$-x^4$	$\mathcal{H}(x)+ux^2+vx$	2
swallotail	x^5	$\mathcal{H}(x)+ux^3+vx^2+wx$	3
butterfly	x^6	$\mathcal{H}(x)+ux^4+vx^3+wx^2+tx$	4
false butterfly	$-x^6$	$\mathcal{H}(x)+ux^4+vx^3+wx^2+tx$	4
hyperbolic umbilic	x^3+y^3	$\mathcal{H}(x,y)+uxy+vx+wy$	3
elliptic umbilic	x^3-xy^2	$\mathcal{H}(x,y)+u(x^2+y^2)+vx+wy$	3
parabolic umbilic	x^2y+y^4	$\mathcal{H}(x,y)+ux^2+vy^2+wx+ty$	4
false parabolic umbilic	x^2y-y^4	$\mathcal{H}(x,y)+ux^2+vy^2+wx+ty$	4

Tabelle 1

Eine weiterführende Klassifikation der Singularitäten wurde von Arnold [9,10] geliefert. Um diese angeben zu können, benötigt man den Begriff der Modalität: Die Modalität eines Punktes $x \in X$ unter der Wirkung einer Lie-Gruppe $\mathcal{G}$ auf einer Mannigfaltigkeit X, $X \times \mathcal{G} \to X$, $(x,g) \to G(x,g)$, ist die kleinste Zahl m, so daß eine genügend kleine Umgebung von x in X höchstens von einer m-parametrigen Familie von Orbits getroffen wird. (Ein Orbit $O \subset X$ ist definiert durch $O := \{x \in X \mid x = G(x_0, g),\ g \in \mathcal{G}\}$, wobei $x_0 \in X$.) Ein (endlich bestimmter) Keim $g \in m(n)$ ist m-modal, wenn sein hinreichender k-jet m-modal ist unter der Gruppe $J^k(n,n) \subset L(n)$ der k-jet-Diffeomorphismen auf der Mannigfaltigkeit der k-jets [9]. Man nennt g einfach, wenn g 0-modal ist. Das nächste Theorem klassifiziert die einfachen Keime:

Theorem 1.9 (Arnold [9]). Jeder einfache Keim $f \in m(n)^2$ mit $\operatorname{codim} f \geq 1$ reduziert sich auf einen Keim η aus der folgenden Liste:

Bezeichnung	η	Codimension
A_k	$\eta(x) = \pm x^{k+1}$	k-1, $k \geq 2$
D_k	$\eta(x,y) = x^2 \pm y^{k-1}$	k-1, $k \geq 3$
E_6	$\eta(x,y) = x^3 \pm y^4$	5
E_7	$\eta(x,y) = x^3 + xy^3$	6
E_8	$\eta(x,y) = x^3 + y^5$	7

Tabelle 2

(Die Bezeichnungen (A, D, E etc.) entsprechen den zugrundeliegenden Weyl-Gruppen.) Bis auf quadratische Formen gibt es somit keine einfachen Keime in $m(n)^2$ für $n \geq 3$. Unimodale Keime (Keime mit Modalität Eins) lassen sich klassifizieren durch

Theorem 1.10 ([10,11]). Jeder unimodale Keim reduziert sich auf einen Keim der einparametrigen hyperbolischen Familie

$$T_{p,q,r}:\ \eta(x,y,z) = axyz + x^p + y^q + z^r,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1,\ a \neq 0,$$

oder auf einen Keim der drei parabolischen Familien

$$T_{3,3,3}:\ \eta(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + axyz,\ \ a^3 + 27 \neq 0$$

$$T_{2,4,4}:\ \eta(x,y) = x^4 + y^4 + ax^2y^2,\ \ a^2 \neq 4$$

$$T_{2,3,6}:\ \eta(x,y) = x^3 + y^6 + ax^2y^2,\ \ 4a^3 + 27 \neq 0,$$

oder auf einen Keim der folgenden vierzehn Familien:

Q_{10}: $\eta(x,y,z)=x^2z+y^3+z^4+ayz^3$

Q_{11}: $\eta(x,y,z)=x^2z+y^3+yz^3+az^5$

Q_{12}: $\eta(x,y,z)=x^2z+y^3+z^5+ayz^4$

S_{11}: $\eta(x,y,z)=x^2z+yz^2+y^4+ay^3z$

S_{12}: $\eta(x,y,z)=x^2z+yz^2+xy^3+ay^5$

U_{12}: $\eta(x,y,z)=x^3+y^3+z^4+axyz^2$

Z_{11}: $\eta(x,y)=x^3y+y^5+axy^4$

Z_{12}: $\eta(x,y)=x^3y+xy^4+ay^6$

Z_{13}: $\eta(x,y)=x^3y+y^6+axy^5$

W_{12}: $\eta(x,y)=x^4+y^5+ax^2y^3$

W_{13}: $\eta(x,y)=x^4+xy^4+ay^6$

K_{12}: $\eta(x,y)=x^3+y^7+axy^5$

K_{13}: $\eta(x,y)=x^3+xy^5+ay^8$

K_{14}: $\eta(x,y)=x^3+y^8+axy^6$

Tabelle 3

Der Modalitätsparameter bei den Familien von Theorem 1.10 ist a, Keime aus derselben Familie, aber mit verschiedenem a sind nicht äquivalent (sie gehören zu verschiedenen Orbits). Die Singularität $T_{2,4,4}$ wird manchmal auch mit X_9 oder als "Doppel-cusp" bezeichnet. Wir werden in Kap. 5 bei der Biegung von Stäben auf eine nichtverselle Entfaltung des Doppel-cusp's stoßen.

2. KATASTROPHENTHEORIE NICHTLINEARER OPERATORGLEICHUNGEN

Zusammenfassung: In diesem Kapitel werden nichtlineare Operatorgleichungen $\mathcal{F}(u,\lambda)=0$ betrachtet mit $u\in B_1$, $\lambda\in\mathbb{R}^k$ und $\mathcal{F}(u,\lambda)\in B_2$, wobei B_1,B_2 reelle separable Banachräume sind, B_1 dicht in B_2. Zusätzlich wird angenommen, daß $\mathcal{F}$ durch den Gradienten eines Funktionals definiert ist. Es soll eine Funktion $g(y,\lambda)\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^m$ bestimmt werden, derart, daß lokal um eine Lösung (u_0,λ_0) alle Lösungen (u,λ) der Gleichung $\mathcal{F}(u,\lambda)=0$ eindeutig durch die stationären Punkte von g bestimmt sind. Damit läßt sich die Katastrophentheorie auf unendlich-dimensionale Räume erweitern. Die Existenz von g wird unter gewissen Voraussetzungen in Kap. 2.2 mittels zweier Theoreme nachgewiesen, deren Beweise außerdem eine Konstruktionsvorschrift für g enthalten. Das erste (Theorem 2.2) ist eine Modifikation des Splitting-Lemmas von Gromoll und Meyer [12], wobei $B_1=B_2=H$ mit einem Hilbertraum H. Im zweiten Theorem (Theorem 2.3) wird der allgemeine Fall von Banachräumen behandelt. In Kap. 2.3 werden mit Hilfe von Theorem 2.3 zwei spezielle Gleichungen untersucht, die von Sattinger [13] und von Keller und Keener [14] diskutiert wurden. Die Ergebnisse dieser Autoren werden auf sehr einfache Weise abgeleitet. In Kap. 2.4 wird das Stabilitätsverhalten der aus den Extrema von g erhältlichen Lösungen der Gleichung $\mathcal{F}(u,\lambda)=0$ analysiert, die als stationäre Lösungen der Differentialgleichung $du/dt=-\mathcal{F}(u,\lambda)$ $(t\in\mathbb{R})$ aufgefasst werden. Die Minima von g implizieren asymptotisch stabile Lösungen, während die übrigen Extrema instabile stationäre Lösungen implizieren.

2.1 Differentialkalkül in Banachräumen

Wir stellen zunächst die wichtigsten Eigenschaften des Frechet-Differentials zusammen [15-17]: B_1,B_2,B_3 seien reelle separable Banachräume und $\mathcal{F}$ sei eine stetige Abbildung von $U\subset B_1$ nach B_2.

(1) $\mathcal{F}$ heißt an der Stelle $u\in U$ (Frechet-) differenzierbar, falls es einen linearen, stetigen Operator $D_{B_1}\mathcal{F}(u):B_1\to B_2$ gibt, so daß zu gegebenem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ existiert mit

$$\|\mathcal{F}(u+h)-\mathcal{F}(u)-D_{B_1}\mathcal{F}(u)h\|_{B_2}\leq\varepsilon\|h\|_{B_1} \qquad (2.1)$$

für alle $h\in B_1$ mit $u+h\in U$ und $\|h\|_{B_1}\leq\delta$. $D_{B_1}\mathcal{F}(u)$ heißt die (Frechet-) Ableitung von $\mathcal{F}$ an der Stelle u.

(2) Ist $\mathcal{F}$ differenzierbar für alle $u\in U$ und ist zusätzlich die Abbildung $D_{B_1}\mathcal{F}: U\to\mathcal{L}(B_1,B_2)$, $u\to D_{B_1}\mathcal{F}(u)$ stetig, so heißt $\mathcal{F}$ stetig differenzierbar auf U. $D_{B_1}\mathcal{F}$ heißt die Ableitung von $\mathcal{F}$. Speziel für $B_2=\mathbb{R}$ gilt $D_{B_1}\mathcal{F}(u)\in B_2^*$.

(3) Induktiv werden höhere Ableitungen definiert: Die m-te Ableitung von $\mathcal{F}$ an der Stelle u ist eine m-lineare, symmetrische, stetige Abbildung $D^m_{B_1}\mathcal{F}(u):B_1^m\to B_2$ und die Abbildung $D^m_{B_1}\mathcal{F}:U\to\mathcal{L}_s(B_1^m,B_2)$ heißt die m-te Ableitung von $\mathcal{F}$.

Ist $D^m_{B_1}\mathcal{F}$ stetig, so nennt man $\mathcal{F}$ m-mal stetig differenzierbar auf U. $\mathcal{F}$ heißt beliebig stetig differenzierbar oder $\mathcal{C}^\infty$ auf U, falls $\mathcal{F}$ m-mal stetig differenzierbar für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist.

(4) Es seien E,E' abgeschlossene Teilräume von B_1 mit $E \cap E' = \{0\}$ und $B_1 = E+E'$, d.h. jedes $u \in B_1$ läßt sich eindeutig zerlegen in $u=v+v'$ mit $v \in E$, $v' \in E'$. Setze $U=V+V'$, wobei $V \subset E, V' \subset E'$. Jedes $v' \in V'$ induziert eine Abbildung $\mathcal{F}_{v'}: V \to B_2$, $\mathcal{F}_{v'}(v) := \mathcal{F}(v+v')$. Die partielle Ableitung von $\mathcal{F}$ bzgl. E an der Stelle $u=v+v'$ ist dann definiert durch $D_E\mathcal{F}(u) := D_E\mathcal{F}_{v'}(v) \in \mathcal{L}(E,B_2)$. Analog definiert man die partielle Ableitung bzgl. E'. $\mathcal{F}$ ist dann stetig differenzierbar auf U g.d.w. die partiellen Ableitungen bzgl. E,E' existieren und die Abbildungen $D_E\mathcal{F}: U \to \mathcal{L}(E,B_2)$, $D_{E'}\mathcal{F}: U \to \mathcal{L}(E',B_2)$ stetig sind [17].

(5) Kettenregel: Es seien $U_i \subset B_i$, i=1,2 und $\mathcal{F}: U_1 \to B_2$, $\mathcal{G}: U_2 \to B_3$, sowie $\mathcal{F}(U_1) \subset U_2$. $\mathcal{F}$ sei an der Stelle $u \in U_1$ und $\mathcal{G}$ an der Stelle $\mathcal{F}(u) \in U_2$ differenzierbar. Dann ist die Kompositionsabbildung $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ an der Stelle u differenzierbar und es gilt [16]:

$$D_{B_1}(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(u)v = D_{B_2}\mathcal{G}(\mathcal{F}(u)) D_{B_1}\mathcal{F}(u)v, \quad v \in B_1.$$

(6) Taylorformel: Es sei $\mathcal{F}$ m+1-mal stetig differenzierbar auf $U \subset B_1$, $m \geq 0$. Außerdem sei $u+\tau v \in U$ für $\tau \in [0,1]$. Dann gilt die Taylorformel:

$$\mathcal{F}(u+v) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} D^j_{B_1}\mathcal{F}(u)v^j + R^{m+1}_{\mathcal{F}}(u,v)v^{m+1}, \tag{2.2}$$

wobei $R^{m+1}_{\mathcal{F}}(u,v) \in \mathcal{L}_s(B_1^{m+1}, B_2)$ definiert ist durch

$$R^{m+1}_{\mathcal{F}}(u,v) := \int_0^1 \frac{(1-\tau)^m}{m!} D^{m+1}_{B_1}\mathcal{F}(u+\tau v)d\tau \tag{2.2}$$

(Das Integral in (2.3) ist als Riemann Stieltje-Integral zu verstehen [15].)
Gilt zusätzlich $u+\tau v \in U$ für alle $\tau \in [0,1]$ und alle v aus einer Umgebung U' von u, so ist die Abbildung $(u,v) \to R^{m+1}_{\mathcal{F}}(u,v)$ stetig auf U'.

(7) Es sei $u \in U$. $\mathcal{F}$ heißt analytisch bei u, falls

(i) $\mathcal{F}$ ist beliebig oft differenzierbar bei u;

(ii) Es gibt eine offene Kugel $U_\delta \subset U$ um u mit Radius $\delta > 0$, so daß

$$\mathcal{F}(u+v) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} D^m_{B_1}\mathcal{F}(u)v^m$$

für alle v mit $u+v \in U_\delta$.

Ist $\mathcal{F}$ analytisch für alle $u \in U$, so heißt $\mathcal{F}$ analytisch auf U.

(8) Von großer Bedeutung ist der Satz über implizite Funktionen:

Theorem 2.1 [17,18]. Es sei $\mathcal{F}: U \times U' \to B_3$, $U \subset B_1$, $U' \subset B_2$ und $\mathcal{F}$ sei m-mal stetig differenzierbar auf $U \times U'$, $m \geq 1$. Außerdem sei $\mathcal{F}(u_0,u_0')=0$ und $D_{B_2}\mathcal{F}(u_0,u_0')$ sei invertierbar. Dann gibt es eine Umgebung $U_0 \subset U$ um u_0, sowie eine eindeutige m-mal stetig differenzierbare Funktion $h: U_0 \to U'$, so daß $h(u_0)=u_0'$ und $\mathcal{F}(u,h(u))=0$ für $u \in U_0$. Ist insbesondere $\mathcal{F}$ analytisch bei (u_0,u_0'), so ist h analytisch bei u_0.

2.2 Katastrophentheorie bei Gradientenoperatoren

Gromoll und Meyer spalteten ein $\mathcal{C}^\infty$-Funktional über einem Hilbertraum H auf [12] in einen singulären Term, der auf einem endlich dimensionalen Teilraum erklärt ist, und eine additive quadratische Form. Dieses Lemma wird verallgemeinert auf Funktionale, die zusätzlich von reellen Parametern abhängen:
Sei H ein reeller separabler Hilbertraum mit Skalarprodukt (.,.) und $\mathfrak{A}$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Funktional von einer Nullumgebung in $H\times\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}$ mit $\mathfrak{A}(0,0)=0$, $D_H\mathfrak{A}(0,0)=0$. Der zu der zweiten Ableitung von $\mathfrak{A}$ bzgl. H an der Stelle $(u,\lambda)=(0,0)$, $u\in H$, $\lambda\in\mathbb{R}^k$ korrespondierende lineare, selbstadjungierte Operator L, definiert durch $D_H^2\mathfrak{A}(0,0)vw=(Lv,w)$ sei Fredholmoperator mit Index Null [18,19]. Der Kern von L werde aufgespannt von $v_1,\dots,v_m\in H, (v_i,v_j)=\delta_{ij}$. Bezeichne mit P die orthogonale Projektion von H nach N:=kerL, $Pu:=\sum_{j=0}^{m}(u,v_j)v_j$, und setze Q:=1-P, E:=QH. E ist abgeschlossener Teilraum von H und der Operator $L_0:=QL|_E:E\to E$ besitzt ein stetiges Inverses L_0^{-1}. Spalte jedes $u\in H$ auf in u=v+w, $v:=Pu\in N$, $w:=Qu\in E$.

Theorem 2.2. Unter den obigen Voraussetzungen gibt es einen lokalen Diffeomorphismus φ um $0\in H\times\mathbb{R}^k$, $\varphi(v,w,\lambda)=(v,\varphi_1(v,w,\lambda),\lambda)$, sowie lokal eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $\tilde{h}$ um $0\in N\times\mathbb{R}^k$ nach E mit $\tilde{h}(0,0)=0$, $D_N\tilde{h}(0,0)=0$, so daß

$$\mathfrak{A}\circ\varphi(v,w,\lambda) = \|P_1w\|_H^2 - \|(1-P_1)w\|_H^2 + r(v,\lambda) \tag{2.4}$$

mit einer orthogonalen Projektion $P_1:E\to E$ und

$$r(v,\lambda) := \mathfrak{A}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda) \tag{2.5}$$

Beweis: Der Gradient $\nabla_H\mathfrak{A}(u,\lambda)$ ist definiert durch $(\nabla_H\mathfrak{A}(u,\lambda),u')=D_H\mathfrak{A}(u,\lambda)u'$, $u'\in H$. Da $D_EQ\nabla_H\mathfrak{A}(0,0)=L_0$, garantiert Theorem 2.1 lokal die Existenz einer eindeutigen Funktion $\tilde{h}$ von einer Umgebung von $0\in N\times\mathbb{R}^k$ nach E mit $\tilde{h}(0,0)=0$ und $Q\nabla_H\mathfrak{A}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda)=0$. Bildet man die Ableitung dieser Gleichung bzgl. N an der Stelle $(v,\lambda)=(0,0)$, so folgt $L_0D_N\tilde{h}(0,0)=0$ und damit $D_N\tilde{h}(0,0)=0$. Setze $\Psi(v,w,\lambda):=(v,w-h(v,\lambda),\lambda)$ und $G(v,w,\lambda):=\mathfrak{A}(v+w,\lambda)-\mathfrak{A}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda)$. Ψ ist Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $\Psi^{-1}(v,w,\lambda)=(v,w+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda)$ und es gilt $G\circ\Psi^{-1}(v,w,\lambda)=\mathfrak{A}(v+w+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda)-\mathfrak{A}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda)$. Außerdem ist $G\circ\Psi^{-1}(v,0,\lambda)=0$ und $D_EG\circ\Psi^{-1}(v,0,\lambda)=0$. Daraus folgt

$$G\circ\Psi^{-1}(v,w,\lambda) = \int_0^1 d\tau\,(1-\tau)D_E^2(G\circ\Psi^{-1})(v,\tau w,\lambda)ww,$$

d.h. die stetige Bilinearform $B(v,w,\lambda):E\times E\to\mathbb{R}$, definiert durch

$$B(v,w,\lambda)w_1w_2 := \int_0^1 d\tau\,(1-\tau)D_E^2(G\circ\Psi^{-1})(v,\tau w,\lambda)w_1w_2\ ,\ w_1,w_2\in H$$

liefert $G\circ\Psi^{-1}(v,w,\lambda)=B(v,w,\lambda)w^2=(A(v,w,\lambda)w,w)$ mit einem selbstadjungierten, stetigen Operator $A(v,w,\lambda):E\to E$, $A(0,0,0)=L_0/2$. Der Rest des Beweises verläuft nach dem Beweis des Morse-Lemmas von Palais [20]: Da L_0 invertierbar, ist dies lokal auch $A(v,w,\lambda)$. Setze $2D(v,w,\lambda):=A^{-1}(v,w,\lambda)L_0$. D ist nahe bei der Identität $1|_E$ in E, daher existiert die Quadratwurzel $C_1(v,w,\lambda)$ von $D(v,w,\lambda)$ als Potenzreihe von $1|_E$ - D. Die Beziehung $AD=L_0/2=L_0^+/2=D^+A$ gilt für jedes Polynom in D

und daher auch für C_1 als Grenzwert eines solchen Polynoms, d.h. $AC_1=C_1^+A$ und damit $C_1^+AC_1=AC_1^2=AD=L_o/2$, bzw. $2C^+(v,w,\lambda)L_oC(v,w,\lambda)=A(v,w,\lambda)$ mit $C^{-1}:=C_1$. Somit:

$$G\circ\Psi^{-1}(v,w,\lambda) = \mathcal{H}\circ\Psi^{-1}(v,w,\lambda) - \mathcal{H}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda)$$
$$= (A(v,w,\lambda)w,w) = (L_oC(v,w,\lambda)w,C(v,w,\lambda)w)/2.$$

Da C invertierbar ist, ist $\tilde{\Phi}(v,w,\lambda):=(v,C(v,w,\lambda)w,\lambda)$ ein lokaler Diffeomorphismus und es gilt mit $\Phi:=\Psi^{-1}\circ\tilde{\Phi}^{-1}$, daß

$$\mathcal{H}\circ\Phi(v,w,\lambda) = (L_ow,w)/2 + \mathcal{H}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda).$$

Es sei Θ die charakteristische Funktion von $[0,\infty[$. Dann ist $P_1:=\Theta(L_o/2)$ eine orthogonale Projektion. Setze $\mathcal{V}(a):=|a|^{-1/2}$, $a\in\mathbb{R}$. Da das Spektrum von L_o die Null nicht enthält ist $\mathcal{V}(L_o/2)=:T$ ein invertierbarer, selbstadjungierter Operator auf E, der mit L_o kommutiert. Wegen $a(\mathcal{V}(a))^2=\mathrm{sgn}a=\Theta(a)-(1-\Theta(a))$ folgt $L_oT^2/2=P_1-(1-P_1)$, d.h. $(L_oT^2w,w)/2 = \|P_1w\|_H^2 - \|(1-P_1)w\|_H^2$. Insgesamt ist daher $\Psi(v,w,\lambda):=\Phi(v,Tw,\lambda)$ der gewünschte Diffeomorphismus, d.h. es gilt

$$\mathcal{H}\circ\Psi(v,w,\lambda) = \|P_1w\|_H^2 - \|(1-P_1)w\|_H^2 + \mathcal{H}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda). \quad \square$$

P_1, bzw. $1-P_1$ projeziert gerade auf den (abgeschlossenen) Teilraum E_+, bzw. E_- von E, auf dem L_o positiv, bzw. negativ definit ist, $P_1E=E_+$, $(1-P_1)E=E_-$. Geht man zu reellen Koordinaten $y:=(y_1,\ldots,y_m)$ über, $v:=\sum_{j=1}^m y_jv_j$, und setzt man $g(y,\lambda):=r(\sum_{j=1}^m y_jv_j,\lambda)$, so folgt aus Theorem 2.2, daß die Lösungen u_λ der Gleichung

$$D_H\mathcal{H}(u,\lambda) = 0 \qquad (2.6)$$

lokal um (0,0) eindeutig durch die Zustandsfläche Z_g von g, d.h. durch die Lösungen $y_\lambda=(y_{1\lambda},\ldots,y_{m\lambda})$ des Gleichungssystems

$$\nabla_y g(y,\lambda) = 0 \qquad (2.7)$$

bestimmt sind vermöge

$$u_\lambda = \sum_{j=1}^m y_{j\lambda}v_j + \tilde{h}(\sum_{j=1}^m y_{j\lambda}v_j,\lambda). \qquad (2.8)$$

Die stationären Punkte von $\mathcal{H}$ sind somit lokal eindeutig gegeben durch die stationären Punkte von g, so daß die Theorie der Entfaltungen von Singularitäten und insbesondere deren Klassifikationsaussagen verwendet werden können. Bevor wir auf die Anwendung der Katastrophentheorie näher eingehen, wird (2.6)-(2.8) auf Banachräume verallgemeinert.

Seien nun B_1,B_2 reelle, separable Banachräume und H ein reeller separabler Hilbertraum mit Skalarprodukt $(.,.)$. Es sei weiterhin $B_1\subseteq B_2\subseteq H\subseteq B_2^*\subseteq B_1^*$ mit jeweils dichten und stetigen Inclusionen. Das Skalarprodukt $(.,.)$ in H sei auch für $u\in B_2$, $v\in B_2^*$ wohldefiniert und es gelte $(u,v)_{B_1\times B_1^*}=(u,v)$ für alle $u\in B_2$, $v\in B_2^*$, d.h. B_2 und B_2^* sind dual bzgl. $(.,.)$. U_1, bzw. U seien offene Nullumgebungen in B_1, bzw. $\mathbb{R}^k$ und $\mathcal{F}:U_1\times U\to B_2$, sowie $\mathcal{H}:U_1\times U\to\mathbb{R}$ seien $\mathcal{C}^\infty$, wobei $\mathcal{F}(0,0)=0$, $\mathcal{H}(0,0)=0$ und $D_{B_1}\mathcal{H}(0,0)=0$. Zusätzlich wird angenommen, daß

$$D_{B_1}\mathcal{H}(u,\lambda)v = (\mathcal{F}(u,\lambda),v),\quad (u,v,\lambda)\in U_1\times B_1\times U. \qquad (2.9)$$

$L:=D_{B_1}\mathcal{F}(0,0):B_1\to B_2$ sei Fredholmoperator mit Index Null und $\ker L\subset B_1$, sowie $\operatorname{coker} L\subset B_2^*$ werde von Elementen $\{v_1,\dots,v_m\}\subset B_1$, $(v_i,v_j)=\delta_{ij}$, aufgespannt. Wegen der endlichen Dimension von N gilt

$$N:=\ker L=\Big\{\sum_{j=1}^m y_j v_j \;\Big|\; y_j\in\mathbb{R},\ 1\leq j\leq m\Big\}=\operatorname{coker} L$$

P_i bezeichne die Projektion von B_i nach N, $P_i u:=\sum_{j=1}^m (u,v_j)v_j$, $u\in B_i$, $i=1,2$. Setze $Q_i:=1-P_i$ und bezeichne mit E_i den abgeschlossenen Teilraum $E_i:=Q_iB_i$, $i=1,2$. Wegen der Fredholmeigenschaft von L gilt $\operatorname{Bild} L=E_2$ und der lineare Operator $L_o:=Q_2L|_{E_1}$ ist ein Isomorphismus von E_1 nach E_2. Außerdem gilt $E_1\subsetneq E_2\subsetneq\tilde{H}\subsetneq E_2^*\subsetneq E_1^*$ mit jeweils dichten und stetigen Inclusionen, wobei $\tilde{H}$ das orthogonale Komplement von N in H ist.

Theorem 2.3. Unter obigen Voraussetzungen gibt es eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $\tilde{h}$ von einer Nullumgebung in $N\times\mathbb{R}^k$ nach E_1 mit $\tilde{h}(0,0)=0$, $D_N\tilde{h}(0,0)=0$, sowie lokal um $(0,0)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $g(y,\lambda)\in\mathbb{R}$, $y=(y_1,\dots,y_m)\in\mathbb{R}^m$, $\lambda\in\mathbb{R}^k$ mit

$$g(0,0)=\partial g(0,0)/\partial y_i=\partial^2 g(0,0)/\partial y_i\partial y_j=0,\quad 1\leq i,j\leq m,$$

so daß lokal um $(u,\lambda)=(0,0)$ alle Lösungen u_λ der Operatorgleichung

$$\mathcal{F}(u,\lambda)=0 \tag{2.10}$$

eindeutig bestimmt sind aus den Lösungen $y_\lambda=(y_{1\lambda},\dots,y_{m\lambda})$ des Gleichungssystems

$$\partial g(y,\lambda)/\partial y_i=0,\quad 1\leq i\leq m \tag{2.11}$$

vermöge

$$u_\lambda=\sum_{i=1}^m y_{i\lambda}v_i+\tilde{h}(\sum_{i=1}^m y_{i\lambda}v_i,\lambda). \tag{2.12}$$

Beweis: Für $u\in B_1$ setze $u=v+w$, wobei $v:=P_1u\in N$, $w:=Q_1u\in E_1$. Gleich. (2.10) wird zerlegt in

$$P_2\mathcal{F}(v+w,\lambda)=0 \tag{2.10a}$$

$$Q_2\mathcal{F}(v+w,\lambda)=0 \tag{2.10b}$$

Wegen $D_{E_1}Q_2\mathcal{F}(0,0)=L_o$ ist (2.10b) nach Theorem 2.1 lokal auflösbar nach $w\in E_1$, womit lokal um $0\in N\times\mathbb{R}^k$ die Existenz einer eindeutigen $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $\tilde{h}(v,\lambda)\in E_1$ mit $\tilde{h}(0,0)=0$ und

$$Q_2\mathcal{F}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda)=0 \tag{2.13}$$

garantiert ist. Da nach der Kettenregel $D_NQ_2\mathcal{F}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda)|_{(v,\lambda)=(0,0)}=L_oD_N\tilde{h}(0,0)$, folgt $D_N\tilde{h}(0,0)=0$. Die Lösungen von (2.10) sind somit eindeutig bestimmt aus den Lösungen der Gleichung

$$P_2\mathcal{F}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda)=\sum_{j=1}^m(\mathcal{F}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda),v_j)v_j=0 \tag{2.14}$$

Nach Übergang zu Komponenten, $v:=\sum_j y_jv_j$, $y_j\in\mathbb{R}$ $(1\leq j\leq m)$, erhält man mit $y:=(y_1,\dots,y_m)$ aus (2.14) das folgende Gleichungssystem:

$$g_l(y,\lambda):=(\mathcal{F}(\sum_{j=1}^m y_jv_j+\tilde{h}(\sum_{j=1}^m y_jv_j,\lambda),\lambda),v_l)=0,\quad 1\leq l\leq m. \tag{2.15}$$

Setze $r(v,\lambda):=\mathcal{R}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda)$. Differentiation von r bzgl. N ergibt

$$D_N r(v,\lambda)v' = D_{B_1}\mathcal{R}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda)[1+D_N\tilde{h}(v,\lambda)]v'$$
$$= \sum_{j=1}^{m}(\mathcal{F}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda),v_j)(v_j,v'),\ v'\in N, \tag{2.16}$$

wobei (2.13) und $D_N\tilde{h}(v,\lambda)v'\in E_1$ benützt wurde. Aus (2.16) folgt, daß

$$D_N r(v,\lambda)v_j = (\mathcal{F}(v+\tilde{h}(v,\lambda),\lambda),v_j). \tag{2.17}$$

Setzt man $g(y,\lambda):= r(\sum_j y_j v_j,\lambda)$, so erhält man mit (2.15) und (2.17) durch Differentiation von g nach y_l:

$$\partial g(y,\lambda)/\partial y_l = D_N r(\textstyle\sum_{j=1}^{m} y_j v_j,\lambda)v_l = g_l(y,\lambda),\ 1\leq l\leq m\ . \tag{2.18}$$

Mit (2.15) und (2.18) sind die Lösungen von (2.10) eindeutig bestimmt aus den Lösungen von (2.11) vermöge (2.12). Da $r(0,0)=0$, $D_N r(0,0)=0$, folgt $g(0,0)=\partial g(0,0)/\partial y_l=0$, $1\leq l\leq m$. Die zweiten Ableitungen von g an der Stelle $(y,\lambda)=(0,0)$ ergeben sich mit (2.16) und $D_N\tilde{h}(0,0)=0$ zu $\partial^2 g(0,0)/\partial y_i\partial y_j=(D_{B_1}\mathcal{F}(0,0)v_i,v_j)=0$. □

In Kap. 4 wird sich zeigen, daß Theorem 2.2 nur auf spezielle Euler-Lagrange-Gleichungen angewandt werden kann, während Theorem 2.3 bei geigneter Wahl der Funktionenräume eine ziemlich große Klasse von Euler-Lagrange-Gleichungen umfasst.

Im allgemeinen läßt sich g nicht explizit berechnen. Man muß sich mit Näherungen zufrieden geben. Gerade hier erweist sich die Theorie der Entfaltungen von Singularitäten als besonders hilfreich. Wir betrachten zuerst $g_0(y):=g(y,0)$. g_0 kann in eine Taylorreihe entwickelt werden, $g_0(y)=\sum_{|\alpha|\geq 3} g_\alpha y^\alpha$ mit Multiindices α. Wir nehmen an, daß g_0 l-bestimmt ist, $l\geq 3$. Dann genügt es, zuerst das l-te Taylorpolynom (den l-jet) von g_0 mit einer Störungsrechnung zu bestimmen. In der Praxis wird man so vorgehen, daß man zuerst den 3-jet bestimmt und überprüft, ob dieser hinreichend ist. Ist dies nicht der Fall, so bestimmt man den 4-jet usw.. Nach l-3 Schritten ist man bei dem hinreichenden l-jet angelangt. Als nächstes ist zu überprüfen, ob die Entfaltung $g(y,\lambda)$ von g_0 versell ist. Dazu schreiben wir $g(y,\lambda)=g_0(y)+\hat{g}(y,\lambda)$ und zerlegen g_0 und $\hat{g}$ in

$$g_0(y) = j^l g(y) + \tilde{g}_0(y),\quad \hat{g}(y,\lambda) = \sum_{1\leq|\alpha|\leq l}\hat{g}_\alpha(\lambda)y^\alpha + \tilde{g}_1(y,\lambda).$$

Um zu entscheiden, ob g_0 von g versell entfaltet wird, ist es nach Theorem 1.5 hinreichend, die linearen Terme der Taylorentwicklung der $\hat{g}_\alpha$, $1\leq|\alpha|\leq l$ zu bestimmen. Ist g eine verselle Entfaltung von g_0, so ist g nach Theorem 1.7 äquivalent zu der universellen Entfaltung $f(x,d)$ einer Normalform $f_0(x):=f(x,0)$, wobei $x=(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$, $d=(d_1,\ldots,d_r)\in\mathbb{R}^r$, $r:=\operatorname{codim} f_0=\operatorname{codim} g_0\leq k$ und

$$f(x,d) = \sum_{j=1}^{r} d_j x^{\alpha_j} + f_0(x)$$

mit Multiindices α_j. f_0 ist ebenfalls ein Polynom in x:

$$f_0(x) = \sum_{3\leq|\alpha|\leq l} f_\alpha x^\alpha$$

Nach Theorem 1.7 besitzt g die Darstellung

$$g(y,\lambda) = f_0(X(y,\lambda)) + \sum_{j=1}^{r} d_j(\lambda)X(y,\lambda)^{\alpha_j} + e(\lambda), \qquad (2.19)$$

mit $e(\lambda)=g(0,\lambda)-f(X(0,\lambda),d(\lambda))$. Die Abbildung $(y,\lambda)\to(X(y,\lambda),d(\lambda),\bar{d}(\lambda))$ ist ein Diffeomorphismus, wobei $\bar{d}(\lambda):=(d_{r+1}(\lambda),\ldots,d_k(\lambda))$"unwesentliche Entfaltungsparameter" enthält. Zustandsfläche Z_g und Bifurkationsmenge Σ_g von g lassen sich dann aus der Zustandsfläche Z_f und Bifurkationsmenge Σ_f von f mit der zu $(y,\lambda)\to(x=X(y,\lambda),d=d(\lambda),\bar{d}=\bar{d}(\lambda))$ inversen Abbildung bestimmen. Die Koeffizienten der Taylorreihen von $X(y,\lambda)$, $d(\lambda)$, $e(\lambda)$ können nach Entwicklung der linken und rechten Seiten von (2.19) durch Koeffizientenvergleich rekursiv berechnet werden. $\bar{d}(\lambda)$ ist so zu wählen, daß die Abbildung $\lambda\to(d(\lambda),\bar{d}(\lambda))$ invertierbar ist. Interessiert man sich nur für eine kleine Umgebung von $(y,\lambda)=(0,0)$, so genügt es i.a., $d(\lambda)$, bzw. $X(y,\lambda)$ bis zur ersten Ordnung in λ, bzw. (y,λ) anzugeben. Im allgemeinen ist es dafür ausreichend, den 1-jet $j^1g_0(y)$ und die $\hat{g}_\alpha$ bis zur ersten Ordnung in λ zu bestimmen.

Falls g keine verselle Entfaltung von g_0 ist, können zusätzliche Parameter $\bar{\lambda}=(\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_s)$, $k<s$, und Funktionen $r_j(y)$, $k+1\leq j\leq s$, eingeführt werden, so daß die Funktion $\bar{g}(y,\lambda,\bar{\lambda}):=g(y,\lambda)+\sum_{j=k+1}^{s}\lambda_j r_j(y)$ eine verselle Entfaltung von g_0 ist. Dann gibt es einen Diffeomorphismus

$$(y,\lambda,\bar{\lambda})\to(X(y,\lambda,\bar{\lambda}),d(\lambda,\bar{\lambda}),\bar{d}(\lambda,\bar{\lambda})),\quad \bar{d}:=(d_{r+1},\ldots,d_s)$$

derart, daß

$$\bar{g}(y,\lambda,\bar{\lambda}) = f_0(X(y,\lambda,\bar{\lambda})) + \sum_{j=1}^{r} d_j(\lambda,\bar{\lambda})X(y,\lambda,\bar{\lambda})^{\alpha_j} + e(\lambda,\bar{\lambda}) \qquad (2.20)$$

bzw.

$$g(y,\lambda) = f_0(X_0(y,\lambda)) + \sum_{j=1}^{r} d_j^0(\lambda)X_0(y,\lambda)^{\alpha_j} + e_0(\lambda) \qquad (2.21)$$

mit $X_0(y,\lambda):=X(y,\lambda,0)$, $d_j^0(\lambda) := d_j(\lambda,0)$, $e_0(\lambda) := e(\lambda,0)$.
Für λ in einer Umgebung von $\lambda=0$ ist die Abbildung $y\to X_0(y,\lambda)$ invertierbar wegen der Diffeomorphieeigenschaft von $(y,\lambda,\bar{\lambda})\to(X,d,\bar{d})$. Z_g und Σ_g können aus Z_f und Σ_f mit der zu $(y,\lambda,\bar{\lambda})\to(X,d,\bar{d})$ inversen Abbildung bestimmt werden, wobei $(d,\bar{d})$ der Einschränkung $\bar{\lambda}(d,\bar{d})=0$ unterliegt. Dies bedeutet, daß nur eine Teilmannigfaltigkeit $\bar{Z}_f\subset Z_f$, bzw. $\bar{\Sigma}_f\subset\Sigma_f$ auf Z_g, bzw. Σ_g abgebildet wird. Die Koeffizienten der Taylorentwicklung von $X(y,\lambda,\bar{\lambda})$, $d(\lambda,\bar{\lambda})$, $\bar{d}(\lambda,\bar{\lambda})$ lassen sich ebenfalls rekursiv durch Taylorentwicklung von (2.20) bestimmen.

Störungsrechnung: Durch Störungsrechnung werden nun die ersten Koeffizienten der Entwicklung von $g(y,\lambda)$ und $h(y,\lambda):=\tilde{h}(\sum_{j=1}^{m}y_jv_j,\lambda)$ bestimmt. Um die Formeln nicht unnötig zu komplizieren, beschränken wir uns auf $k=1$ ($\lambda\in\mathbb{R}$) und $\dim N=1$., d.h. $y\in\mathbb{R}$, und $N=\{yv\mid y\in\mathbb{R}\}$, wobei $v\in B_1$, $(v,v)=1$. $\mathcal{F}$ und $\mathcal{A}$ werden in Taylorreihen entwickelt,

$$\mathcal{F}(u,\lambda) = Lu + \sum_{j=1}^{\infty} F_{0j}\lambda^j + \sum_{l=2}^{\infty} F_{l0}u^l + \sum_{l,j=1}^{\infty} F_{lj}u^l\lambda^j \tag{2.22}$$

$$\mathcal{R}(u,\lambda) = Au^2 + \sum_{j=1}^{\infty} R_{0j}\lambda^j + \sum_{l=3}^{\infty} R_{l0}u^l + \sum_{l,j=1}^{\infty} R_{lj}u^l\lambda^j, \tag{2.23}$$

mit $F_{0j} \in B_2$, $R_{0j} \in \mathbb{R}$ und symmetrischen multilinearen Abbildungen $A \in \mathcal{L}_s(B_1^2, \mathbb{R})$, $F_{lj} \in \mathcal{L}_s(B_1^l, B_2)$, $R_{lj} \in \mathcal{L}_s(B_1^l, \mathbb{R})$, wobei

$$2Au_1u_2 = (Lu_1, u_2), \quad lR_{lj}u_1\dots u_l = (F_{l-1,j}u_1\dots u_{l-1}, u_l), \quad u_1, u_2, \dots, u_l \in B_1.$$

Setze die Taylorentwicklung von h,

$$h(y,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} h_{0j}\lambda^j + \sum_{l=2}^{\infty} h_{l0}y^l + \sum_{l,j=1}^{\infty} h_{lj}y^l\lambda^j, \quad h_{lj} \in B_1 \tag{2.24}$$

in (2.10b) ein. Mit (2.22) ergibt sich daraus das folgende rekursive System für die h_{lj}:

$$h_{20} = -L_0^{-1}Q_2F_{20}v^2 \tag{2.25a}$$

$$h_{30} = -L_0^{-1}Q_2\{2F_{20}h_{20}v + F_{30}v^3\} \tag{2.25b}$$

$$h_{40} = -L_0^{-1}Q_2\{F_{20}(h_{20}^2 + 2h_{30}v) + 3F_{30}h_{20}v^2 + F_{40}v^4\} \tag{2.25c}$$

$$h_{50} = -L_0^{-1}Q_2\{2F_{20}(h_{40}v + h_{20}h_{30}) + 3F_{30}(h_{30}v^2 + vh_{20}^2) + 4F_{40}h_{20}v^3 + F_{50}v^5\} \tag{2.25d}$$

$$\begin{aligned} h_{60} = -L_0^{-1}Q_2\{&F_{20}(h_{30}^2 + 2h_{20}h_{40} + 2h_{50}v) + F_{30}(h_{20}^3 + 3h_{40}v^2 + 6h_{20}h_{30}v) \\ &+ F_{40}(4h_{30}v^3 + 6h_{20}^2v^2) + 5F_{50}h_{20}v^4 + F_{60}v^6\} \end{aligned} \tag{2.25e}$$

.....

$$h_{01} = -L_0^{-1}Q_2F_{01} \tag{2.26a}$$

$$h_{02} = -L_0^{-1}Q_2\{F_{02} + F_{20}h_{01}^2\} \tag{2.26b}$$

$$h_{03} = -L_0^{-1}Q_2\{F_{03} + 2F_{20}h_{01}h_{02} + F_{30}h_{01}^3\} \tag{2.26c}$$

$$h_{04} = -L_0^{-1}Q_2\{F_{04} + F_{20}(h_{02}^2 + 2h_{01}h_{03}) + 3F_{30}h_{01}^2h_{02} + F_{40}h_{01}^4\} \tag{2.26d}$$

.....

$$h_{11} = -L_0^{-1}Q_2\{2F_{20}h_{01}v + F_{11}v\} \tag{2.27a}$$

$$h_{21} = -L_0^{-1}Q_2\{2F_{20}(h_{11}v + h_{01}h_{20}) + 3F_{30}h_{01}v^2 + F_{21}v^2 + F_{11}h_{20}\} \tag{2.27b}$$

$$\begin{aligned} h_{31} = -L_0^{-1}Q_2\{&2F_{20}(h_{21}v + h_{30}h_{01} + h_{11}h_{20}) + 3F_{30}(h_{11}v^2 + 2h_{01}h_{20}v) \\ &+ 4F_{40}h_{01}v^3 + F_{11}h_{30} + 2F_{21}h_{20}v + F_{31}v^3\} \end{aligned} \tag{2.27c}$$

$$\begin{aligned} h_{41} = -L_0^{-1}Q_2\{&2F_{20}(h_{31}v + h_{40}h_{01} + h_{20}h_{21} + h_{11}h_{30}) + 3F_{30}(h_{21}v^2 + h_{20}^2h_{01} + 2h_{30}h_{01}v \\ &+ 2h_{11}h_{20}v) + 4F_{40}(h_{11}v^3 + 3h_{01}h_{20}v^2) + 5F_{50}h_{01}v^4 + F_{11}h_{40} \\ &+ F_{21}(h_{20}^2 + 2h_{30}v) + 3F_{31}h_{20}v^2 + F_{41}v^4\} \end{aligned} \tag{2.27d}$$

.....

Entwickelt man $g(y,\lambda)$ in eine Taylorreihe,

$$g(y,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} g_{oj}\lambda^j + \sum_{l=3}^{\infty} g_{lo}y^l + \sum_{l,j=1}^{\infty} y^l\lambda^j \,, \tag{2.28}$$

so erhält man für die Koeffizienten g_{lj} durch Einsetzen von $u=yv+h(y,\lambda)$ in (2.23),

$$g_{3o} = R_{3o}v^3 \tag{2.29a}$$

$$g_{4o} = \tfrac{3}{2}R_{3o}v^2h_{2o}+R_{4o}v^4 \tag{2.29b}$$

$$g_{5o} = 3R_{3o}h_{2o}{}^2v+4R_{4o}h_{2o}v^3+R_{5o}v^5 \tag{2.29c}$$

$$g_{6o} = R_{3o}(h_{4o}v^2+h_{2o}h_{3o}v)+2R_{4o}(h_{3o}v^3+h_{2o}{}^2v^2)+10R_{5o}h_{2o}v^4/3+R_{6o}v^6 \tag{2.29d}$$

.....

$$g_{o1} = R_{o1} \tag{2.30a}$$

$$g_{o2} = R_{o2}+Ah_{o1}{}^2 \tag{2.30b}$$

$$g_{o3} = R_{o3}+2Ah_{o1}h_{o2}+R_{3o}h_{o1}{}^3 \tag{2.30c}$$

$$g_{o4} = R_{o4}+A(h_{o2}{}^2+2h_{o1}h_{o3})+3R_{3o}h_{o1}{}^2h_{o2}+R_{4o}h_{o1}{}^4 \tag{2.30c}$$

.....

$$g_{11} = R_{11}v \tag{2.31a}$$

$$g_{21} = 3R_{3o}h_{o1}v^2+R_{21}v^2 \tag{2.31b}$$

$$g_{31} = 2R_{3o}(h_{11}v^2+h_{o1}h_{2o}v)+4R_{4o}h_{o1}v^3+2R_{21}h_{2o}v/3+R_{31}v^3 \tag{2.31c}$$

$$g_{41} = 3R_{3o}(h_{21}v^2+h_{3o}h_{o1}+h_{11}h_{2o}v)/2+3R_{4o}(h_{11}v^3+2h_{o1}h_{2o}v^2)+5R_{5o}h_{o1}v^4 + R_{21}h_{3o}v/2+3R_{31}h_{2o}v^2/2+R_{41}v^4 \tag{2.31d}$$

.....

Wir geben noch eine allgemeine Rekursionsformel für die h_{lo}, g_{lo}an. Setzt man $h_{o1}:=v$, so läßt sich h_{lo} $(l\geqslant 2)$,bzw.g_{lo} $(l\geqslant 3)$ aus den h_{ko} mit $1\leqslant k\leqslant l-1$ nach (2.25f), bzw. (2.29e) berechnen:

$$h_{lo} = -\sum_{k=2}^{l} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_k=l \\ j_i\geqslant 1}} L_o^{-1}Q_2F_{ko}h_{j_1o}\ldots h_{j_ko} \tag{2.25f}$$

$$g_{lo} = \sum_{k=3}^{l} \frac{k}{l} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{k-1}=l-1 \\ j_i\geqslant 1}} R_{ko}h_{j_1o}\ldots h_{j_{k-1}o}v \tag{2.29e}$$

2.3 Beispiele

1) Bifurkationsproblem nach Sattinger:

Sattinger [13] untersuchte das Bifurkationsverhalten der Gleichung

$$\mathcal{F}(u,\lambda) := (L+F(\lambda))u + Nu^2 = 0. \qquad (2.32)$$

In Gleich. (2.32) sind $\lambda\in\mathbb{R}$, L, $F(\lambda)\in\mathcal{L}(B_1,B_2)$, $N\in\mathcal{L}_s(B_1^2,B_2)$, wobei B_1,B_2 reelle separable Banachräume, $B_1\subseteq B_2$ mit stetiger und dichter Inclusion. $F(\lambda)$ sei analytisch in λ mit $F(0)=0$, d.h. $F(\lambda)=\lambda F_1+\lambda^2F_2+\ldots$ und L sei Fredholmoperator mit Index Null. $\mathrm{Ker}L$ werde von $v\in B_1$, $\mathrm{coker}L$ von $v^*\in B_2^*$ aufgespannt und es sei $(v,v^*)_{B_2\times B_2^*}=1$. Sattinger nimmt außerdem an, daß $L+F(\lambda)$, aufgefaßt als dicht definierter Operator in B_2, einen einfachen Eigenwert $\mu(\lambda)$ mit Eigenvektor $u_1(\lambda)$ besitzt und $\mu(0)=0$, $u_1(0)=v$, $d\mu(0)/d\lambda=:\mu_1\neq 0$ ist. Der Notation Sattingers folgend setzen wir $(u,v^*)_{B_2\times B_2^*}=:[u]$, $u\in B_2$. Die Projektionen P_i, $i=1,2$, von B_1, bzw. B_2 in den von v aufgespannten Teilraum sind dann gegeben durch $P_iu:=[u]v$, $u\in B_i$, $i=1,2$. Setze $Q_i:=1-P_i$ und $E_i:=Q_iB_i$, $i=1,2$. Q_2 projeziert auf das in B_2 abgeschlossene Bild von L und $L_o:=Q_2L|_{E_1}$ besitzt ein stetiges Inverses. Unter diesen Voraussetzungen beweist Sattinger folgendes Theorem:

Theorem 2.4 (Sattinger [13]). Es gibt eine einparametrige Familie $u(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon)$ von Lösungen von (2.32) mit $[u(\varepsilon)]=\varepsilon$ und $u(0)=0$, $\lambda(0)=0$.

Sattinger hat damit gezeigt, daß zu Gleich. (2.32) neben der trivialen Lösung $u=0$ noch ein nichttrivialer Lösungszweig existiert, der für $\varepsilon\to 0$ in die triviale Lösung übergeht. An der Stelle $(u,\lambda)=(0,0)$ tritt also eine Bifurkation auf. Wir gehen von denselben Annahmen aus wie Sattinger, nehmen aber noch zusätzlich an, daß die Voraussetzungen von Theorem 2.3 erfüllt sind, d.h. es sei $v=v^*\in B_1$ und B_2,B_2^* seien bzgl. des Skalarproduktes eines Hilbertraumes H, $B_2\subseteq H\subseteq B_2^*$ dual. Mit (2.9) und (2.32) ist dann

$$\mathcal{A}(u,\lambda) - \mathcal{A}(0,0) = \tfrac{1}{2}(Lu,u) + \tfrac{1}{2}\lambda(\hat{F}(\lambda)u,u) + \tfrac{1}{3}(Nu^2,u), \qquad (2.33)$$

wobei $\hat{F}(\lambda):=F_1+\lambda F_2+\lambda^2F_3+\ldots$. Einsetzen der Entwicklung $u_1(\lambda)=v+\lambda\hat{u}_1+\lambda^2\hat{u}_2+\ldots$ in die Eigenwertgleichung $(L+F(\lambda))u_1(\lambda)=\mu(\lambda)u_1(\lambda)$ ergibt $L\hat{u}_1+F_1v=\mu_1v$ durch Koeffizientenvergleich der ersten Ordnung in λ. Wegen $[L\hat{u}_1]=(L\hat{u}_1,v)=0$ folgt daraus, daß $[F_1v]=\mu_1$. Die Lösung $h(y,\lambda)$ von (2.10b) ist mit (2.25)-(2.27) gegeben durch

$$h(y,\lambda) = h_{11}y\lambda + h_{20}y^2 + \ldots., \qquad (2.34)$$

wobei $h(0,\lambda)=0$ und $h_{11}=-L_o^{-1}Q_2F_1v$, $h_{20}=-L_o^{-1}Q_2Nv^2$. Für $g(y,\lambda)$ erhält man

$$g(y,\lambda) - g(0,\lambda) = g_{21}y^2\lambda + g_{30}y^3 + g_{40}y^4 + \ldots., \qquad (2.35)$$

wobei $g_{21}=(F_1v,v)/2=\mu_1/2\neq 0$, $g_{30}=(Nv^2,v)/3$, $g_{40}=(Lh_{20},h_{20})/2+(Nv^2,h_{20})$. Die Lösungen von (2.32) sind nach Theorem 2.3 eindeutig bestimmt durch die Lösungen der Gleichung

$$g'(y,\lambda) := \partial g(y,\lambda)/\partial y = y(\mu_1\lambda + 3g_{30}y^2 + \tfrac{4}{3}g_{40}y^3+\ldots) = 0 \qquad (2.36)$$

Eine Lösung von (2.36) ist y=0, also u=0. Die übrigen Lösungen sind eindeutig bestimmt durch

$$\hat{g}(y,\lambda) := \mu_1\lambda + 3g_{30}y^2 + 4g_{40}y^3 + \ldots = 0. \qquad (2.37)$$

Wegen $\partial\hat{g}(0,0)/\partial\lambda = \mu_1 \neq 0$ ist (2.37) lokal eindeutig auflösbar nach $\lambda = \lambda(y)$. Ein einparametriger Lösungszweig von (2.32) ist somit gegeben durch $(u(y), \lambda(y))$, wobei $u(y) := yv + h(y, \lambda(y))$, d.h. $[u(y)] = y$. Theorem 2.4 folgt also direkt aus Theorem 2.3, falls zusätzlich die Voraussetzungen von Theorem 2.3 erfüllt sind. Allerdings reichen die Voraussetzungen von Sattinger nicht aus, um zu entscheiden, ob g_0 endlich bestimmt ist, $g_0(y) := g(y,0)$. Die Singularität g_0 ist genau dann endlich bestimmt, wenn irgendein Koeffizient ihrer Taylorentwicklung nicht verschwindet. Falls g_0 nicht endlich bestimmt ist folgt $\lambda(y)=0$, es tritt dann keine Bifurkation im üblichen Sinn auf. Schließlich sei noch bemerkt, daß g nur für $g_{30} \neq 0$ eine verselle Entfaltung von g_0 ist. Ist z.B. $g_{30}=0$ und $g_{40} \neq 0$, so ist g eine nichtverselle Entfaltung der zur Singularität der cusp-Katastrophe äquivalenten Singularität g_0.

2) Bifurkationsproblem nach Keller und Keener:

Keller und Keener [14] untersuchten das Bifurkationsverhalten der Gleichung

$$\mathcal{F}(u,\lambda,\tau) = 0, \quad u \in B, \quad \lambda,\tau \in \mathbb{R} \qquad (2.38)$$

mit einer analytischen Abbildung $\mathcal{F}: B \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to B$, B reeller, separabler Banachraum. Die Autoren setzen voraus, daß

$$\mathcal{F}(u,\lambda,\tau) = Lu + \lambda F_{1\lambda} u + \tau F_{0\tau} + \mathcal{G}(u,\lambda,\tau), \qquad (2.39)$$

wobei

$$\mathcal{G}(u,\lambda,\tau) = G_1(u,\lambda,\tau)u^{p+1} + \tau^2 G_2(u,\lambda,\tau) + \lambda\tau G_3(u,\lambda,\tau) + \tau G_4(u,\lambda,\tau)u + \lambda^2 G_5(u,\lambda,\tau)u, \quad p \in \mathbb{N} \qquad (2.39a)$$

$G_1(u,\lambda,\tau)$ ist ein p+1-linearer, $G_i(u,\lambda,\tau)$, i=1,2, ein linearer Operator und $G_j(u,\lambda,\tau) \in B$, j=2,3. L sei Fredholmoperator mit Index Null und kerL, bzw. cokerL werde von $v \in B$, bzw. $v^* \in B^*$ aufgespannt, $(v,v^*)_{B\times B^*}=1$. Weitere Voraussetzungen für $\mathcal{F}$ sind:

$$a := (F_{1\lambda}v, v^*)_{B\times B^*} \neq 0, \quad b := (F_{0\tau}, v^*)_{B\times B^*} \neq 0, \quad G_{p+1} := (G_0^{p+1}v^{p+1}, v^*)_{B\times B^*} \neq 0,$$

wobei $G_0^{p+1} := (p+1)!G_1(0,0,0)$. Das Bifurkationsverhalten für $\tau=0$ kann z.B. nach Sattinger [13] oder nach Keller und Langford [21] behandelt werden. In [21] wird gezeigt, daß für $\tau=0$ Gleich. (2.38) neben der trivialen Lösung u=0 noch einen weiteren nichttrivialen Lösungszweig $(u_0(y), \lambda_0(y))$, $y \in \mathbb{R}$ besitzt mit $(u_0(y), v^*)_{B\times B^*} = y$. Eine Störungsrechnung ergibt

$$\lambda_0(y) = -y^p \frac{G_{p+1}}{(p+1)!a} + o(y^p)$$

Für $\tau \neq 0$ beweisen die Autoren das folgende Theorem mit Hilfe von Kontraktionsabbildungen:

Theorem 2.5 (Keller und Keener [14]). Das Gleichungssystem (2.38) mit (2.40),

$$D_B \mathcal{F}(u,\lambda,\tau)\bar{u} = 0 \tag{2.40}$$

besitzt eine einparametrige Lösungsfamilie $u=u_1(y)$, $\bar{u}=\bar{u}_1(y)$, $\lambda=\lambda_1(y)$, $\tau=\tau_1(y)$, mit

$$u_1(y) = yv + y^{p+1}\tilde{u}_1(y), \quad \bar{u}_1(y) = v + y^p\hat{u}_1(y)$$

und $(\tilde{u}_1(y),v^*)_{BxB^*}=(\hat{u}_1(y),v^*)_{BxB^*}=0$. Durch Störungsrechnung ergibt sich [14]:

$$\lambda_1(y) = -\, y^p G_{p+1}/(ap!) + o(y^p) \tag{2.41a}$$

$$\tau_1(y) = y^{p+1} G_{p+1} p/(b(p+1)!) + o(y^{p+1}) \tag{2.41b}$$

Theorem 2.5 besagt, daß es in der λ-τ-Ebene eine Kurve gibt, auf der nichtisolierte Lösungen von (2.38) existieren. Elimination von y in (2.41) ergibt

$$\lambda(\tau) = -\,\mathrm{sgn}(G_{p+1}a)C_1\tau^{p/(p+1)} + \ldots., \text{ p gerade} \tag{2.42a}$$

$$\tau(\lambda) = \mathrm{sgn}(G_{p+1}b)C_2\lambda^{(p+1)/p} + \ldots\ldots, \text{ p ungerade} \tag{2.42b}$$

mit $C_1 := \left|(G_{p+1}/ap!)(b(p+1)/a)^p\right|^{1/(p+1)}$, $C_2 := C_1^{(p+1)/p}$

Die Graphen von (2.42) sind in Fig. 2 dargestellt. Da $\lambda_1(y)/\lambda_0(y)\big|_{y=0} = \frac{p+1}{p}$, steigt der nichttriviale Lösungszweig als Funktion von y schneller an als der Bifurkationszweig für $\tau=0$ (Fig. 3).

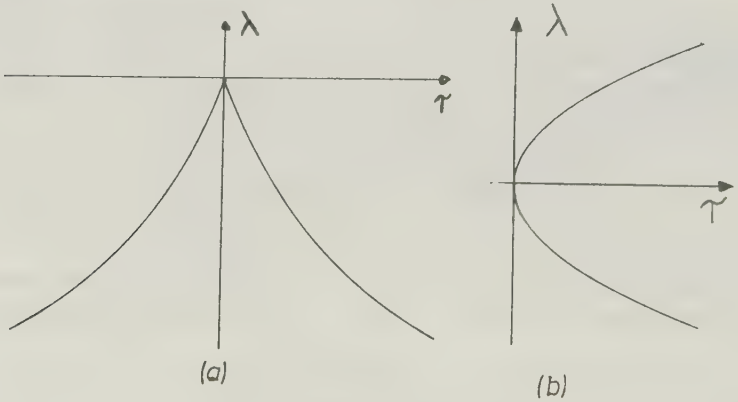


Fig. 2: Graph von Gl. (2.42) in der λ-τ-Ebene. (a) p gerade, $G_{p+1}a>0$, (b) p ungerade, $G_{p+1}b>0$.

In einem weiteren Theorem zeigen Keller und Keener, daß von jedem Punkt des nichtisolierten Lösungszweiges ein weiterer nichttrivialer Lösungszweig abzweigt:

Theorem 2.6 (Keller und Keener [14]). Es gibt eine zweiparametrige Lösungsschar ($\lambda=\lambda_2(y,z)$, $\tau=\tau_1(y)$, $u=u_2(y,z)$), $y\neq 0$, $|z|<|y|$ von Lösungen der Gleich. (2.38) mit

$$u_2(y,z) = (y+z)v + u_1(y) + zy^p\tilde{u}_2(y) + z^2\hat{u}_2(y,z) \tag{2.43a}$$

$$\lambda_2(y,z) = \lambda_1(y) + z^2\tilde{\lambda}_2(y,z), \tag{2.43b}$$

wobei $$(\tilde{u}_2(y),v^*)_{BxB^*} = (\hat{u}_2(y,z),v^*)_{BxB^*} = 0 \tag{2.43c}$$

$$\tilde{\lambda}_2(y,0) = -\frac{G_{p+1}}{2a(p-1)!}\, y^{p-2} + o(y^{p-2}), \tag{2.43d}$$

$$\lambda_2(y,z) = -\, y^{p-2}(y^2 + \frac{p}{2} z^2)\, \frac{G_{p+1}}{ap!} + \ldots. \tag{2.43e}$$

Eine graphische Darstellung von (2.43d,e) findet man in Fig. 4.

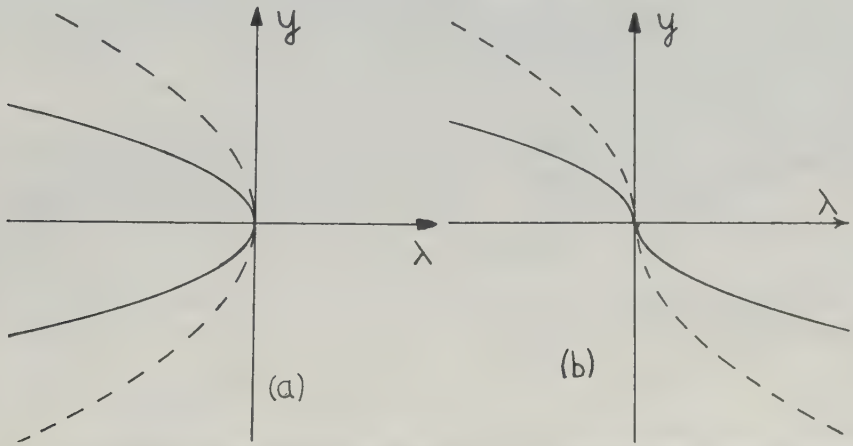


Fig. 3: Nichtisolierter Bifurkationszweig $\lambda_1(y)$ (durchgezogene Linie) und Bifurkationszweig $\lambda_0(y)$ für $\tau=0$ (gestrichelte Linie). (a) p gerade, $G_{p+1}a>0$, (b) p ungerade, $G_{p+1}a>0$, $p>1$.

Wir gehen nun ebenfalls von (2.38) und (2.39) aus, nehmen aber verallgemeinernd an, daß $\mathcal{F}$ eine Abbildung von einem Banachraum B_1 nach einem Banachraum B_2 ist, $B_1 \subseteq B_2$ mit dichter und stetiger Inclusion. Zusätzlich seien die Voraussetzungen von Theorem 2.3 erfüllt, d.h. $v=v^* \in B_1$ und B_2, B_2^* sind bzgl. des Skalarproduktes eines Hilbertraumes H dual, $B_2 \subseteq H \subseteq B_2^*$. Zuerst wird (2.39a) umgeschrieben:

$$\mathcal{F}(u,\lambda,\tau) = Lu + \lambda F_{1\lambda}u + \tau F_{o\tau} + \tau\sum_{j=1}^{p} G_{j4}u^j + \frac{1}{(p+1)!}\, G_o^{p+1}u^{p+1} + \tilde{\mathcal{G}}(u,\lambda,\tau), \tag{2.44}$$

wobei $$\tilde{\mathcal{G}}(u,\lambda,\tau) := \mathcal{G}(u,\lambda,\tau) - \tau\sum_{j=1}^{p} G_{j4}u^j - \frac{1}{(p+1)!}\, G_o^{p+1}u^{p+1} \tag{2.45a}$$

und G_4 entwickelt wurde,

$$G_4(u,\lambda,\tau) = \sum_{j=1}^{p} G_{j4}u^j + \tilde{G}_4(u,\lambda,\tau). \tag{2.45b}$$

Das Funktional $\mathcal{A}$ ist mit den Voraussetzungen von Theorem 2.3 gegeben durch

$$\mathcal{A}(u,\lambda,\tau) = \frac{1}{2}(Lu,u) + \tau(F_{o\tau},u) + \frac{1}{2}\lambda(F_{1\lambda}u,u) + \tau\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j+1}(G_{j4}u^j,u) + \frac{1}{(p+2)!}(G_o^{p+1}u^{p+1},u) + \tilde{\mathcal{A}}(u,\lambda,\tau), \tag{2.46}$$

wobei $\tilde{\mathcal{A}}$ der Beziehung $$D_{B_1}\tilde{\mathcal{A}}(u,\lambda,\tau)u' = (\tilde{\mathcal{G}}(u,\lambda,\tau),u'),\ u' \in B_1 \tag{2.47}$$

genügt. Die Lösung $h(y,\lambda,\tau)=\tilde{h}(yv,\lambda,\tau)$ von (2.10b) ergibt sich durch eine

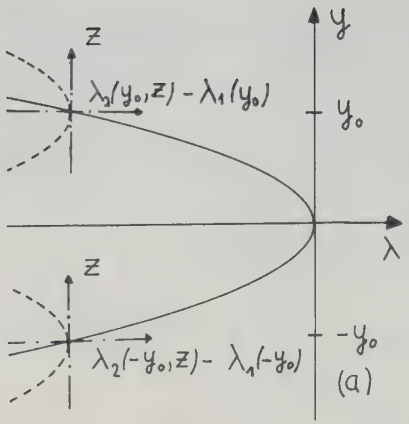
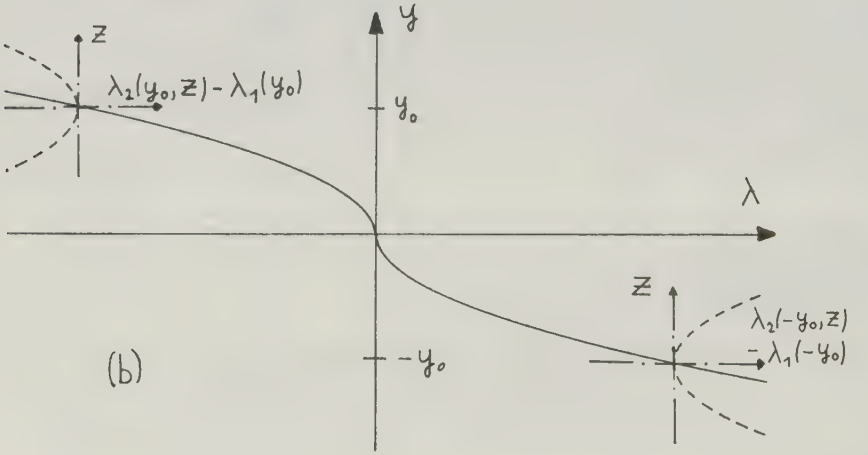


Fig. 4: Graph von Gl. (2.43d,e). Die durchgezogene Linie ist der nichtisolierte Lösungszweig $\lambda_1(y)$. Von jedem Punkt $\lambda_1(\pm y_0)$ $(y_0 > 0)$ auf dieser Linie zweigt ein nichttrivialer Lösungszweig $\lambda_2(\pm y_0, z)$ $- \lambda_1(\pm y_0)$ ab (gestrichelte Linie).

(a) p gerade, $G_{p+1}{}^a > 0$

(b) p ungerade, $G_{p+1}{}^a > 0$, $p > 1$.



Störungsrechnung zu

$$h(y,\lambda,\tau) = \tau h_\tau + y\lambda h_{1\lambda} + \tau\sum_{j=1}^{p} h_{j\tau} y^j + y^{p+1} h_{p+1} + \hat{h}(y,\lambda,\tau), \tag{2.48}$$

wobei

$$h_\tau = -L_o^{-1} Q_2 F_{o\tau} \tag{2.49a}$$

$$h_{1\lambda} = -L_o^{-1} Q_2 F_{1\lambda} v \tag{2.49b}$$

$$h_{j\tau} = -L_o^{-1} Q_2 G_{j4} v^j, \quad 1 \leq j \leq p-1 \tag{2.49c}$$

$$h_{p\tau} = -L_o^{-1} Q_2 \left[G_{p4} v^p + (1/(p+1)!) G_o^{p+1} h_\tau \right] \tag{2.49d}$$

$$h_{p+1} = -(1/(p+1)!) L_o^{-1} Q_2 G_o^{p+1} v^{p+1} \tag{2.49e}$$

$$\hat{h}(y,\lambda,\tau) = \sum_{j \geq p+1} (\lambda h_{j\lambda} + \tau h_{j\tau}) y^j + \sum_{n+m \geq 1} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^n \tau^m y^l h_{nm}^l + \sum_{i=p+2}^{\infty} h_i y^i \tag{2.49f}$$

mit Vektoren $h_{j\lambda}, h_{j\tau}, h^1_{nm}, h_i \in B_1$. Einsetzen von $u=yv+h(y,\lambda,\tau)$ in (2.46) ergibt mit (2.48) und (2.49) den folgenden Ausdruck für $g(y,\lambda,\tau)$:

$$g(y,\lambda,\tau) = b\tau y + \frac{1}{2}\, a\lambda y^2 + \tau\sum_{j=2}^{p+1} \gamma_j y^j/j + \frac{G_{p+1}}{(p+2)!}\, y^{p+2} + \tilde{g}(y,\lambda,\tau), \tag{2.50}$$

wobei $\gamma_j = (G_{j-1,4}v^{j-1},v)$, $2 \leqslant j \leqslant p$ (2.51a)

$$\gamma_{p+1} = (G_{p4}v^p,v) + (p+1)(F_{o\tau},h_{p+1}) + (G^{p+1}_o v^{p+1},h_\tau)/p! \tag{2.51b}$$

$$\tilde{g}(y,\lambda,\tau) = \sum_{j\geqslant p+3} g_j y^j + \sum_{j\geqslant p+2} (\lambda g_{j\lambda} + \tau g_{j\tau}) y^j + \sum_{n+m\geqslant 1} \sum_{l=1}^{\infty} g^l_{nm} \lambda^n \tau^m y^l \tag{2.51c}$$

mit reellen Zahlen $g_j, g_{j\lambda}, g_{j\tau}, g^l_{nm}$. Nach Theorem 2.3 sind die Lösungen von (2.38) eindeutig bestimmt aus den Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} g'(y,\lambda,\tau) := \partial g(y,\lambda,\tau)/\partial y = b\tau + a\lambda y + \tau\sum_{j=1}^{p} \gamma_{j+1} y^j + \frac{G_{p+1}}{(p+1)!}\, y^{p+1} \\ + \partial\tilde{g}(y,\lambda,\tau)/\partial y = 0 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Für $\tau=0$ folgt aus (2.52) die Lösung $y=0$, also $u=0$, und ein weiterer nichttrivialer Lösungszweig

$$\lambda_o(y) = -\, G_{p+1} y^p/a(p+1)! + o(y^p) \tag{2.53a}$$

mit der zugehörigen Lösung $u=u_o(y)$,

$$u_o(y) = yv + (h_{p+1} - G_{p+1}h_{1\lambda}/a(p+1)!)y^{p+1} + o(y^{p+1}). \tag{2.53b}$$

Wir zeigen nun, wie sich Theorem 2.5 auf sehr einfache Weise mit Hilfe der aus Theorem 2.3 gewonnenen Gleichungen (2.47)-(2.52) beweisen läßt: Aus

$$\mathcal{F}(u,\lambda,\tau) = Q_2\mathcal{F}(u,\lambda,\tau) + P_2\mathcal{F}(u,\lambda,\tau) = Q_2\mathcal{F}(u,\lambda,\tau) + (\mathcal{F}(u,\lambda,\tau),v)v$$

erhält man nach Einsetzen von $u=yv+h(y,\lambda,\tau)$ die Gleichung

$$\mathcal{F}(yv+h(y,\lambda,\tau),\lambda,\tau) = g'(y,\lambda,\tau)v \tag{2.54}$$

und durch Differentiation von (2.54) nach y folgt

$$D_{B_1}\mathcal{F}(yv+h(y,\lambda,\tau),\lambda,\tau)[v + \partial h(y,\lambda,\tau)/\partial y] = g''(y,\lambda,\tau)v, \tag{2.55}$$

wobei $g''(y,\lambda,\tau) := \partial^2 g(y,\lambda,\tau)/\partial y^2$. Die Lösungen $u,\tilde{u}$ des Gleichungssystems (2.38) mit (2.40) sind somit bestimmt durch die Gleichungen (2.52) und (2.56),

$$g''(y,\lambda,\tau) = a\lambda + \tau\sum_{j=1}^{p} j\,\gamma_{j+1} y^{j-1} + \frac{G_{p+1}}{p!}\, y^p + \ldots = 0 \tag{2.56}$$

mit den Lösungen $\lambda = \lambda_1(y) = -\, G_{p+1}y^p/ap! + o(y^p)$

$$\tau = \tau_1(y) = G_{p+1}py^{p+1}/b(p+1)! + o(y^{p+1}),$$

d.h. (2.41). Die zugehörigen Lösungen $u=u_1(y)$, $\tilde{u}=\tilde{u}_1(y)$ von (2.38) mit (2.40) sind gegeben durch

$$u_1(y) = yv + h(y,\lambda_1(y),\tau_1(y)) = yv + \tilde{h}_{p+1}y^{p+1} + o(y^{p+1}) \tag{2.57a}$$

$$\tilde{u}_1(y) = v + h'(y,\lambda_1(y),\tau_1(y)) = v + \tilde{h}_p y^p + o(y^p), \tag{2.57b}$$

wobei $h'(y,\lambda,\tau) := \partial h(y,\lambda,\tau)/\partial y$ und

$$\tilde{h}_{p+1} := \frac{G_{p+1}^{p}}{b(p+1)!}\, h_{\tau} - \frac{G_{p+1}}{ap!}\, h_{1\lambda} + h_{p+1}, \quad \tilde{h}_{p} := (p+1)h_{p+1} - \frac{G_{p+1}}{ap!}\, h_{1\lambda}.$$

Theorem 2.5 wurde somit auf sehr einfache Weise bewiesen. Theorem 2.6 ist keine ausreichende Beschreibung des Bifurkationsverhaltens von Gleich. (2.38), da insbesondere der Grenzübergang $y \longrightarrow 0$ nicht vollzogen werden kann. Man erhält die in Theorem 2.6 angegebenen Formeln (2.43) durch Auflösen der Gleichung

$$g'(y+z, \lambda_1(y)+\tilde{\lambda}, \tau_1(y)) = 0, \; y \neq 0$$

nach $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_2(y,z)$, wobei eine Störungsrechnung in $(y,z/y)$ durchgeführt und $|z|<|y|$ vorausgesetzt werden muß. $u_2(y,z)$ ist dann gegeben durch

$$u_2(y,z) = (y+z)v + h(y+z, \lambda_1(y)+\tilde{\lambda}_2(y,z), \tau_1(y)).$$

Einen besseren Eindruck vom Bifurkationsverhalten der Gleich. (2.38) erhält man durch graphische Darstellung der Lösungsfläche (Zustandsfläche) Z_g von (2.52) im y-λ-τ-Raum. Fig. 5a zeigt diese für p ungerade, Fig. 5b für p gerade. Die gestrichelten Kurven in Fig. 4 (der Graph von (2.43d,e) für festes $\pm y_0$, $y_0 > 0$) sind die Schnittkurven der Lösungsfläche Z_g mit den Ebenen $\tau = \tau_1(\pm y_0)$. Für p ungerade ist in der ersten nichttrivialen Näherung (Ordnung p+1) $\tau_1(y_0) = \tau_1(-y_0)$, jedoch erhält man durch den eben erwähnten Schnitt zwei verschiedene Kurven. Für p gerade ist in der ersten nichttrivialen Näherung $\tau_1(-y_0) = -\tau_1(y_0)$ und jede der beiden Ebenen $\tau = \tau_1(\pm y_0)$ schneidet die Lösungsfläche Z_g in genau einer Kurve (Fig. 6). Die in Fig. 2 abgebildete Kurve des nichtisolierten Lösungszweiges in der λ-τ- Ebene ist die Projektion der Bifurkationsmenge (bestimmt durch $g'=g''=0$) in die λ-τ-Ebene. Zu bemerken ist noch, daß g (Gleich. (2.50)) für p=2 äquivalent ist zur cusp-Katastrophe und für p=1 zur fold-Katastrophe. Für $p \geq 3$ ist g eine nichtverselle Entfaltung der Singularität $g_0(y) := g(y,0)$ und g_0 ist äquivalent zu der Singularität $f_0(x) = x^{p+2}$.

In [22] untersuchen Keller und Keener das Ausbeulen von ebenen kreisförmigen Platten unter Einwirkung einer Schubkraft in radialer Richtung und einer radialsymmetrischen Kraft senkrecht zur Plattenebene. λ ist proportional zur Schubkraft und τ proportional zur senkrecht wirkenden Kraft. Die Autoren erhalten p=2, also die cusp-Katastrophe. In [23] wendet Keener die Theoreme 2.5 und 2.6 auf zwei weitere nichtlineare Probleme der Elastizitätstheorie an. Ersteres behandelt eine Kugelschale, auf die ein zum Zentrum gerichteter gleichförmiger Druck wirkt, letzteres einen dehnbaren Stab unter axialer Belastung. λ ist jeweils proportional zur angewandten Kraft, während τ ein Imperfektionsparameter ist, der die Abweichung des nichtdeformierten Elastikums von der Idealform beschreibt. Bei der Kugelschale ergibt sich p=1, beim Stab p=2. In Kap. 5 werden wir uns ebenfalls mit dem Stabproblem befassen. Es wird sich herausstellen, daß, falls Länge, Elastizitätsmodul und Schubkraft in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen, der cusp (p=2) nicht mehr ausreicht, sondern der Doppel-cusp zur Beschreibung des Bifurkationsverhaltens herangezogen werden muß.

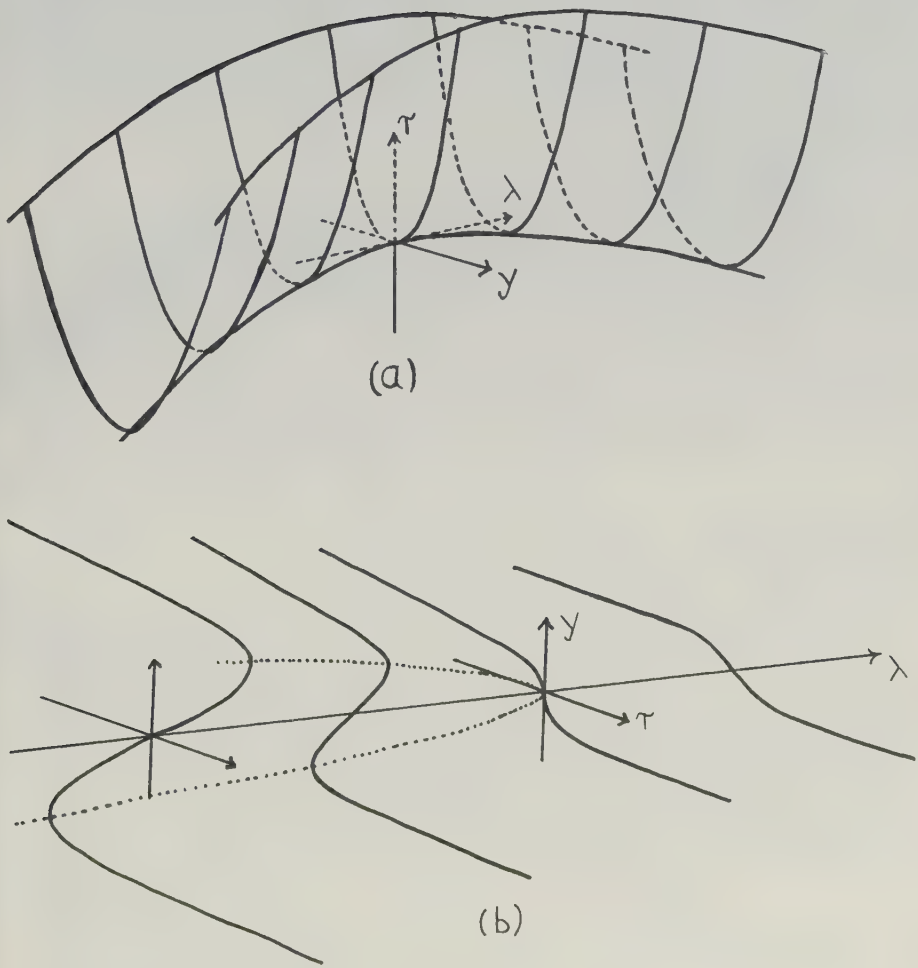
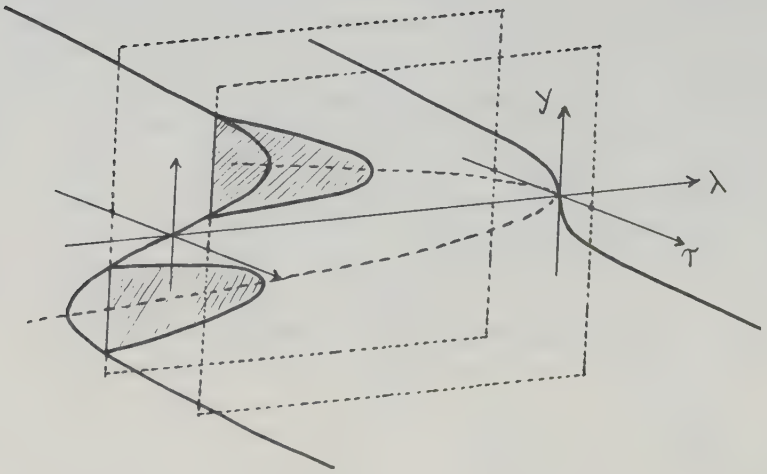


Fig. 5: Lösungsfläche von Gl. (2.52) im y-λ-τ-Raum.
(a) p ungerade, $G_{p+1}{}^{b} > 0$, (b) p gerade, $G_{p+1}{}^{a} > 0$.



ig. 6: Schnittkurven der Lösungsfläche von Gl. (2.58) mit den Ebenen $\tau = \pm \tau_0$ $(\tau_0 > 0)$ für p gerade. Die Schnittkurven sind identisch mit den gestrichelten Kurven in Fig. 4a.

.4 Stabilitätsanalyse der Bifurkationslösungen

ie nach Theorem 2.3 erhaltenen Lösungen der Gleich. $\mathcal{F}(u,\lambda)=0$ werden als cationäre Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} = -\mathcal{F}(u,\lambda) \tag{2.58}$$

ufgefaßt, wobei eine Abbildung $t \to u(t) \in B_1$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ eine Lösung von (2.58) ist, enn (i) u(t) ist stetig in der Norm von B_1

(ii) In der Norm von B_2 ist u(t) stetig differenzierbar und erfüllt (2.58).

em Verfasser ist kein Existenztheorem für (2.58) mit beliebigem $\mathcal{F}$ bekannt. egal [24] bewies ein Existenztheorem für (2.58), falls $\mathcal{F}$ die Darstellung

$$\mathcal{F}(u,\lambda) = \tilde{L}(\lambda)u + \mathcal{G}(u,\lambda) \tag{2.59}$$

esitzt, wobei $\tilde{L}(\lambda) \in \mathcal{L}(B_1,B_2)$, aufgefaßt als dicht definierter Operator in B_2, ne stetige Halbgruppe [25] in B_2 erzeugt und der lineare Operator $D_{B_1}\mathcal{F}(u,\lambda)$ $\mathcal{L}(B_1,B_2)$ sich zu einem stetigen Operator auf B_2 erweitern läßt. Setzt man

$$\tilde{L}(\lambda) := D_{B_1}\mathcal{F}(0,\lambda), \quad \mathcal{G}(u,\lambda) := \int_0^1 D_{B_1}\mathcal{F}(\tau u,\lambda)u d\tau - \tilde{L}(\lambda)u,$$

läßt sich zwar $\mathcal{F}$ gemäß (2.59) zerlegen und $\tilde{L}(\lambda)$ ist bei den nichtlinearen liptischen Differentialoperatoren von Kap. 4 sicherlich der Erzeuger einer stegen Halbgruppe, jedoch kann i.a. $D_{B_1}\mathcal{G}(u,\lambda) \in \mathcal{L}(B_1,B_2)$ nicht stetig auf B_2 eritert werden, so daß die Voraussetzungen von Segal nicht notwendig erfüllt nd. Wir beschränken uns daher in diesem Abschnitt auf eine formale, lineare

Stabilitätsanalyse (vgl. Sattinger [13]). Dazu nehmen wir an, daß für alle $(u,\lambda)\in U_1\times U$ der lineare Operator

$$L(y,\lambda) := D_{B_1}\mathcal{F}(\textstyle\sum_{l=1}^{m} y_l v_l + h(y,\lambda),\lambda),\ y\in\mathbb{R}^m,$$

sich zu einem dicht definierten Operator in H erweitern läßt mit einem Definitionsbereich $H_1\subseteq H$, wobei H_1 Hilbertraum und $B_1\subseteq H_1\subseteq B_2\subseteq H$ mit jeweils dichten und stetigen Inclusionen. Wegen

$$D^2_{B_1}\mathcal{F}(\textstyle\sum_{l=1}^{m} y_l v_l+h(y,\lambda),\lambda)u_1u_2 = (L(y,\lambda)u_1,u_2) = (L(y,\lambda)u_2,u_1),\ u_1,u_2\in B_1,$$

und der dichten und stetigen Einbettung von B_1 in H_1 ist $L(y,\lambda)$ selbstadjungiert in H. Wir nehmen an, daß das Spektrum von $L(y,\lambda)$ für (y,λ) in einer Umgebung von $(0,0)$ abzählbar ist, $\mathrm{Spec}L(y,\lambda) = \{\mu_j(y,\lambda)\in\mathbb{R} \mid j\in\mathbb{N}\}$, mit $\mu_j\to\infty$ $(j\to\infty)$. Die zugehörigen Eigenvektoren $u_j(y,\lambda)$, $j\in\mathbb{N}$ seien aus B_1 und vollständig in B_1,B_2,H,H_1. Außerdem sei $u_j(0,0)=v_j$, $\mu_{j0}:=\mu_j(0,0)=0$ für $1\leq j\leq m$ und $\mu_{j0}>0$ für $j>m$. Aus Stetigkeitsgründen ist dann $\mu_j(y,\lambda)>0$ für $j>m$ und (y,λ) in einer Umgebung von $(0,0)$. Es sei nun $u_\lambda := \sum_{j=1}^{m} y_{j\lambda}v_j+h(y_\lambda,\lambda)$ eine stationäre Lösung von (2.58), bestimmt durch eine Lösung $y_\lambda:=(y_{1\lambda},\dots,y_{m\lambda})$ von (2.7). $u(t):=u_\lambda+\tilde{u}(t)$ sei eine Lösung von (2.58) mit $\tilde{u}(0)=\tilde{u}_0$ und $\|\tilde{u}_0\|_{B_1}$ sei genügend klein. In erster Näherung genügt $\tilde{u}(t)$ der um u_λ linearisierten Differentialgleichung von (2.58):

$$\frac{du(t)}{dt} \approx -L(y_\lambda,\lambda)\tilde{u}(t). \tag{2.60}$$

Entwickelt man u(t) nach Eigenvektoren,

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)u_j(y_\lambda,\lambda),\ r_j(t)\in\mathbb{R},$$

setzt diese Entwicklung in (2.60) ein und bildet das Skalarprodukt bzgl. H, so ergibt sich das folgende lineare Differentialgleichungssystem für die r_j:

$$\frac{dr_j(t)}{dt} = -\mu_j(y_\lambda,\lambda)r_j(t),\ j\in\mathbb{N}. \tag{2.61}$$

u_λ ist daher asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte $\mu_j(y_\lambda,\lambda)$ positiv sind und instabil, wenn ein Eigenwert negativ ist. Es wird gezeigt, daß die Anzahl der positiven, bzw. verschwindenden Eigenwerte von $L(y,\lambda)$ gleich der Anzahl der positiven, bzw. verschwindenden Eigenwerte der Jacobi-Matrix $g^2_{ij}(y,\lambda) := \partial^2 g(y,\lambda)/\partial y_i\partial y_j$ $(1\leq i,j\leq m)$ ist. Setze

$$F(y,\lambda) := \mathcal{F}(\textstyle\sum_{l=1}^{m} y_l v_l+h(y,\lambda),\lambda),\ \hat{L}(y,\lambda) := Q_2L(y,\lambda)|_{E_1}\in\mathcal{L}(E_1,E_2).$$

$\hat{L}(y,\lambda)$ ist für kleine (y,λ) stetig invertierbar wegen $\hat{L}(0,0)=L_0$. Außerdem läßt sich $\hat{L}$ erweitern auf $\bar{E}_1$, das bzgl. $(.,.)$ orthogonale Komplement von N in H_1. $\hat{L}$ ist ein Isomorphismus von $\bar{E}_1$ nach $\bar{E}_2$, wobei $\bar{E}_2$ das orthogonale Komplement von N in H ist. Da alle Eigenwerte von L_0 positiv sind, ist $\hat{L}(y,\lambda)$ positiv definit, $(\hat{L}(y,\lambda)w,w)>0$ für alle $w\in\bar{E}_1$ mit $\|w\|_H\neq 0$. Differentiation der Gleichung

$$F(y,\lambda) = \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial g(y,\lambda)}{\partial y_l}v_l \tag{2.62}$$

nach y_j ergibt

$$L(y,\lambda)(v_j + h_j(y,\lambda)) = \sum_{l=1}^{m} g_{jl}^2(y,\lambda)v_l,\ 1\leq j\leq m, \tag{2.63}$$

wobei $h_j(y,\lambda) := \partial h(y,\lambda)/\partial y_j$. Aus $Q_2F(y,\lambda)=0$ folgt durch Differentiation nach y_j, daß

$$\hat{L}(y,\lambda)h_j(y,\lambda) + L(y,\lambda)v_j - \sum_{i=1}^{m}(L(y,\lambda)v_j,v_i)v_i = 0,\quad 1\leq j\leq m. \tag{2.64}$$

Bildet man das Skalarprodukt von (2.64) mit $w\in \bar{E}_1$, so folgt wegen $(v_j,w)=0$ und der Selbstadjungiertheit von $\hat{L}$, daß

$$(h_j(y,\lambda),L(y,\lambda)w) = (h_j(y,\lambda),\hat{L}(y,\lambda)w) = -(L(y,\lambda)w,v_j) \tag{2.65}$$

für $w\in \bar{E}_1$, $1\leq j\leq m$. Definiere einen linearen Operator $J(y,\lambda)$ durch

$$J(y,\lambda)u := w + \sum_{l=1}^{m} r_l(v_l + h_l(y,\lambda)), \tag{2.66a}$$

wobei $r_l := (v_l,u)$ $(1\leq l\leq m)$, $w := u - \sum_{l=1}^{m} r_l v_l$.

$J(y,\lambda)$ ist stetig differenzierbar in H und H_1 für (y,λ) in einer Umgebung von $(0,0)$. Der zu $J(y,\lambda)$ bzgl. $(.,.)$ adjungierte Operator $J^+(y,\lambda)$ ist gegeben durch

$$J^+(y,\lambda)u = \sum_{l=1}^{m}(r_l + (h_l(y,\lambda),w))v_l + w. \tag{2.66b}$$

Unter Verwendung von (2.63), (2.65) und (2.66) ergibt sich für $u\in H_1$:

$$J^+(y,\lambda)L(y,\lambda)J(y,\lambda)u = \hat{L}(y,\lambda)w + \sum_{j,l=1}^{m} g_{jl}^2(y,\lambda)r_j v_l \tag{2.67}$$

Bildet man das Skalarprodukt von (2.67) mit u, so folgt

$$(L(y,\lambda)J(y,\lambda)u,J(y,\lambda)u) = (\hat{L}(y,\lambda)w,w) + \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}^2(y,\lambda)r_i r_j. \tag{2.68}$$

Wegen der Invertierbarkeit von J und L ist das Verschwinden von $n\leq m$ Eigenwerten von $L(y,\lambda)$ äquivalent dazu, daß die symmetrische mxm-Matrix $g^2(y,\lambda) := \{g_{ij}^2(y,\lambda)\}$ einen n-dimensionalen Kern besitzt. Falls genau $l\leq m$ Eigenwerte von $L(y,\lambda)$ negativ sind, ist (wegen der Positiv-Definitheit von $L(y,\lambda)$) $g^2(y,\lambda)$ auf einem l-dimensionalen Teilraum von $\mathbb{R}^m$ negativ definit und auf dem dazu orthogonalen Teilraum positiv semidefinit. Dies ist aber äquivalent dazu, daß $g^2(y,\lambda)$ genau l negative Eigenwerte besitzt. Es wurde daher folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 2.1. Die Anzahl der negativen (positiven, verschwindenden) Eigenwerte von $L(y,\lambda)$ ist gleich der Anzahl der negativen (positiven, verschwindenden) Eigenwerte der Matrix $g^2(y,\lambda)$.

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich das

Corrollar: Es sei y_λ eine Lösung von (2.7) und $u := \sum_{j=1}^{m} y_{j\lambda}v_j + h(y_\lambda,\lambda)$ die zu y_λ assoziierte stationäre Lösung von Gleich.(2.58). Ferner sei die Determinante von $g^2(y_\lambda,\lambda)$ von Null verschieden. Dann gilt:

(i) u_λ ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von $g^2(y_\lambda,\lambda)$ positiv sind.

(ii) u_λ ist instabil, wenn ein Eigenwert von $g^2(y_\lambda,\lambda)$ negativ ist.

3. DIFFERENZIERBARKEITSEIGENSCHAFTEN VON FUNKTIONALEN UND OPERATOREN IN SOBOLEW-RÄUMEN

Zusammenfassung: In Kap. 2 wurde ein Formalismus entwickelt, der es erlaubt, das Bifurkationsverhalten von speziellen nichtlinearen Operatoren in Banachräumen durch die Entfaltung $g(y,\lambda)$ einer Singularität $g_0(y)$ zu charakterisieren. Um g auf eine Katastrophennormalform transformieren zu können, mußte vorausgesetzt werden, daß diese Operatoren $\mathcal{C}^\infty$ sind. Da der Formalismus von Kap. 2 in Kap. 4 auf elliptische Differentialgleichungen angewandt werden soll, die sich als Euler-Lagrange-Gleichungen eines Funktionals formulieren lassen, müssen die Differenzierbarkeitseigenschaften solcher Funktionale in speziellen Funktionenräumen untersucht werden. Am besten eignen sich hierfür Sobolew-Räume, deren wichtigste Eigenschaften in Kap. 3.1 zusammengefaßt werden. In Kap. 3.2 werden Bedingungen angegeben, unter denen einer Funktion via Komposition eine differenzierbare Abbildung zwischen L_p-Räumen zugeordnet werden kann. In Kap. 3.3 werden drei Theoreme über Differenzierbarkeitseigenschaften von Funktionalen und Operatoren in Sobolew-Räumen angegeben.

3.1 Eigenschaften Sobolew'scher Räume

(1) Reguläre Mengen im $\mathbb{R}^n$ ([19,26]): Ω sei eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ($n\in\mathbb{N}$). $C_l(\Omega)$ ($l\in\mathbb{N}_0$) ist die Menge aller l-mal stetig differenzierbaren und beschränkten Funktionen von Ω nach $\mathbb{R}$. $C_l(\Omega)$ ist Banachraum mit Norm $\|v\|_{C_l(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le l} \sup_{x\in\Omega}|\partial^\alpha v(x)|$, $v=v(x)\in C_l(\Omega)$. Die Mengen $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n$ (i=1,2) seien offen. Man nennt eine bijektive Abbildung $\omega:\Omega_1\to\Omega_2$ einen l-Diffeomorphismus, wenn ω und die Umkehrabbildung ω^{-1} l-mal stetig differenzierbar sind und es positive Konstanten a,b gibt mit $a\le|\det(\partial\omega/\partial x)|\le b$ für alle $x\in\Omega_1$. (Für ω^{-1} gilt nach dem Satz über implizite Funktionen eine analoge Abschätzung.) Ω_1 und Ω_2 heißen l-diffeomorph. Zwei abgeschlossene Mengen $A_i\subset\mathbb{R}^n$ (i=1,2) heißen l-diffeomorph, wenn es offene Umgebungen Ω_1,Ω_2 gibt, $A_i\subset\Omega_i$, so daß Ω_1 und Ω_2 l-diffeomorph und $\omega(A_1)=A_2$. Es sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und der Rand $\partial\Omega$ von Ω nicht leer. Ein Punkt $x\in\partial\Omega$ heißt l-glatt, falls es eine offene Umgebung U_x um x gibt, so daß $\bar{U}_x\cap\bar{\Omega}$ l-diffeomorph zur abgeschlossenen Halbkugel $K_1^+(0):=\{x\in\mathbb{R}^n\mid|x|\le 1,\ x_1\ge 0\}$ und dabei $\bar{U}_x\cap\partial\Omega$ auf $K_1^+(0)\cap\{x\in\mathbb{R}^n\mid x_1=0\}$ abgebildet wird. Ω heißt l-regulär, wenn jedes $x\in\partial\Omega$ l-glatt ist. Ist Ω für jedes $l\in\mathbb{N}_0$ l-regulär, so nennen wir Ω kurz regulär.

(2) Definition der Sobolew'schen Räume ([27,28]): Ist φ eine Funktion von $A\subset\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$, so bezeichnet $\operatorname{supp}\varphi$ den Träger von φ, d.h. den Abschluß aller $x\in A$ mit $\varphi(x)\neq 0$ in $\mathbb{R}^n$. Der Banachraum $\mathring{C}_k(\Omega)$ ($k\in\mathbb{N}_0$, Ω offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$) ist der Abschluß aller $\varphi\in C_k(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega$ in $C_k(\Omega)$. Ist Ω l-regulär, so be-

steht $\mathring{C}_k(\Omega)$ für $0 \leq k \leq l$ aus allen auf $\bar{\Omega}$ k-mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen bis zur Ordnung k auf $\partial\Omega$ verschwinden.

Ein Zugang zu den Sobolew-Räumen ergibt sich aus der Theorie der verallgemeinerten Funktionen [29,30]. Wir führen daher zunächst einige Begriffe aus der Distributionstheorie ein, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i.F. stets offen sei: $D(\Omega)$ ist der Raum aller Testfunktionen auf Ω, d.h. die Menge aller $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen mit kompaktem Träger in Ω. $D(\Omega)$ ist Frechet-Raum [30], die Topologie in $D(\Omega)$ ist durch eine abzählbare Sequenz von Halbnormen gegeben, $|\varphi|_l := \|\varphi\|_{C_l(\Omega)}$, $l \in \mathbb{N}_0$, $\varphi \in D(\Omega)$. $D'(\Omega)$ ist die Menge aller Distributionen über Ω, d.h. der topologische Dualraum von $D(\Omega)$. $L_p(\Omega)$, $p \in [1,\infty[$, ist die Menge aller $v:\Omega \to \mathbb{R}$, deren p-te Potenz (im Sinne von Lebesgue) meßbar ist, $\int_\Omega |v(x)|^p dx < \infty$, wobei zwei solche Funktionen als gleich angesehen werden, wenn sie bis auf eine Menge vom Maß Null übereinstimmen (Faserung nach Äquivalenzklassen). Für $1 < p < \infty$ ist $L_p(\Omega)$ ein reflexiver Banachraum mit Norm

$$\|v\|_{L_p(\Omega)} := \Big[\int_\Omega |v(x)|^p dx\Big]^{1/p}, \quad v \in L_p(\Omega),$$

und der Dualraum von $L_p(\Omega)$ ist isomorph zu $L_q(\Omega)$, wobei $1/q+1/p=1$. Speziell $L_2(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(u,v)_{L_2(\Omega)} := \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad u,v \in L_2(\Omega).$$

Der Sobolew-Raum $W_p^l(\Omega)$ ($p \in [1,\infty[$, $l \in \mathbb{N}_0$) besteht aus allen $v \in D'(\Omega)$, deren (verallgemeinerte) Ableitungen bis zur Ordnung l aus $L_p(\Omega)$ sind (mit der üblichen Faserung nach Äquivalenzklassen versehen). $W_p^l(\Omega)$ ist Banachraum mit Norm

$$\|v\|_{W_p^l(\Omega)} := \Big[\sum_{|\alpha| \leq l} \|\partial^\alpha v\|^p_{L_p(\Omega)}\Big]^{1/p}, \quad v \in W_p^l(\Omega).$$

Für $p > 1$ ist $W_p^l(\Omega)$ ein reflexiver, separabler Banachraum und $W_2^l(\Omega)$ ist Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(u,v)_{W_2^l(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq l} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L_2(\Omega)}, \quad u,v \in W_2^l(\Omega).$$

Der abgeschlossene Teilraum $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ von $W_p^l(\Omega)$ ist der Abschluß von $D(\Omega)$ in $W_p^l(\Omega)$. Es gilt $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^n) = W_p^l(\mathbb{R}^n)$, während für jedes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \neq \emptyset$ $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ für $l \geq 1$ ein echter Teilraum von $W_p^l(\Omega)$ ist. Das kartesische Produkt $(W_p^l(\Omega))^s$, bzw. $(\mathring{W}_p^l(\Omega))^s$ ($s \in \mathbb{N}$), d.h. der Raum aller s-vektorwertigen Funktionen mit Komponenten aus $W_p^l(\Omega)$, bzw. aus $\mathring{W}_p^l(\Omega)$, wird mit $W_p^{l,s}(\Omega)$, bzw. $\mathring{W}_p^{l,s}(\Omega)$ abgekürzt.

(3) Eigenschaften Sobolew'scher Räume ([27,28]):

(i) Für $l \in \mathbb{N}$ ist $W_p^l(\Omega)$ dicht in $W_p^{l-1}(\Omega)$ und die Einbettung ist stetig, analoges gilt für $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ und $\mathring{W}_p^{l-1}(\Omega)$. Außerdem ist $\mathring{W}_p^0(\Omega) = W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$, d.h. $D(\Omega)$ ist dicht in $L_p(\Omega)$.

(ii) $C_l(\Omega)$ bzw. $\mathring{C}_l(\Omega)$ liegt dicht in $W_p^l(\Omega)$ bzw. $\mathring{W}_p^l(\Omega)$. Sobolew-Räume können können daher auch als Vervollständigung von $C_l(\Omega)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{W_p^l(\Omega)}$

verstanden werden.

(iii) Ist Ω 1-regulär und $\partial\Omega \neq \emptyset$, so gibt es eine eindeutige lineare, stetige Abbildung $S_k: W_p^k(\Omega) \to W_p^{k-1}(\partial\Omega)$, $1 \leqslant k \leqslant l$, so daß $S_k v = v|_{\partial\Omega}$ für $v \in C_1(\bar{\Omega})$. S_k heißt der Spuroperator.

(iv) Sobolew-Lemma: Die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt die Kegelbedingung, wenn es positive Konstanten h,a und für jedes $x \in \Omega$ ein $\xi_x \in S_1 := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| = 1\}$ gibt, so daß der Kegel $C_x := \{x+y \mid y = r\xi,\ 0 \leqslant r \leqslant h, |\xi| = 1, |\xi - \xi_x| \leqslant a\}$ ganz in Ω enthalten ist.

Lemma 3.1 (Sobolew-Lemma, vgl. [27]). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfülle die Kegelbedingung. Dann gilt: (a) Ist $1/p-(1-j)/n < 0$, $j \in \mathbb{N}_0$, so ist $W_p^l(\Omega) \subset C_j(\bar{\Omega})$ und die Einbettung ist stetig. (b) Es sei $v \in W_p^l(\Omega)$ und α sei ein Multiindex mit $|\alpha| \geqslant l - n/p$. Dann ist jedes $\partial^\alpha v$ aus $L_r(\Omega)$, wobei $r \in [1,\infty[$ ein Exponent mit $1/r \leqslant 1/p-(l-|\alpha|)/n$ ist. Außerdem ist die Abbildung $W_p^l(\Omega) \to L_r(\Omega)$, $v \to \partial^\alpha v$ stetig $(v \in W_p^l(\Omega))$.

(v) Kompakte Einbettungen (Theorem von Rellich): Die Einbettung von $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ in $\mathring{W}_p^{l-1}(\Omega)$ ist kompakt für $l \in \mathbb{N}$. Ist Ω l-regulär, so ist die Einbettung von $W_p^k(\Omega)$ in $W_p^{k-1}(\Omega)$ für $1 \leqslant k \leqslant l$ ebenfalls kompakt.

3.2 Differenzierbarkeit von Operatoren zwischen L_p-Räumen

Ω sei i.F. stets eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{mes}\,\Omega < \infty$. Es werden Bedingungen angegeben, unter denen einer Funktion via Komposition eine differenzierbare Abbildung zwischen L_p-Räumen zugeordnet werden kann. Das folgende Theorem von Vainberg [15] wird benötigt:

Theorem 3.1 (Vainberg [15]). $F: \Omega \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ erfülle folgende Bedingungen:

(1) Für jedes $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s) \in \mathbb{R}^s$ ist $F_\xi(x) := F(x,\xi)$ meßbar auf Ω.

(2) F ist stetig auf $\mathbb{R}^s$ für fast alle $x \in \Omega$.

(3) Es gibt eine Funktion $c \in L_p(\Omega)$ und eine positive Konstante b, so daß

$$|F(x,\xi)| \leqslant |c(x)| + b\sum_{j=1}^{s} |\xi_j|^{p_j/p}, \quad 1 \leqslant p_j, p < \infty. \tag{3.1}$$

Dann ist der (Nemytsky-) Operator

$$\mathcal{F}: B := \prod_{j=1}^{s} L_{p_j}(\Omega) \to L_p(\Omega), \quad (\mathcal{F}(u))(x) := F(x,u(x)),$$
$$u(x) = (u_1(x), \ldots, u_s(x)),\ u_j \in L_{p_j}(\Omega),$$

stetig.

Beweis: Aus (3.1) folgt sofort, daß $\mathcal{F}(u) \in L_p(\Omega)$. Es sei eine Folge $u^j = (u_1^j, \ldots, u_s^j)$ mit $u_i^j \in L_{p_i}(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}$, gegeben und u_i^j konvergiere in der $L_{p_i}(\Omega)$-Norm gegen ein $u_i \in L_{p_i}(\Omega)$. Aus der Konvergenz in der L_{p_i}-Norm folgt die Konvergenz im Maß. Nach einem Theorem von Nemytsky (vgl. Vainberg [15]) konvergiert dann $F(.,u^j(.))$ im Maß gegen $F(.,u(.))$, $u = (u_1, \ldots, u_s) \in B$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ strebt somit das Maß der Mengenfolge $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $B_j := \{x \in \Omega \mid |F(x,u(x)) - F(x,u^j(x))| \geqslant \varepsilon\}$, gegen Null. Daraus folgt, daß

$$L_j := \int_\Omega |F(x,u(x))-F(x,u^j(x))|^p dx = \Big(\int_{\Omega/B_j} + \int_{B_j}\Big)|F(x,u(x))-F(x,u^j(x))|^p dx$$

$$\leqslant \varepsilon^p \mathrm{mes}\Omega + \int_{B_j}\Big\{2|c(x)|+b\sum_{i=1}^{s}\big[|u_i^j(x)|^{p_i/p}+|u_i(x)|^{p_i/p}\big]\Big\}^p dx .$$

Unter Verwendung der Hölder'schen Ungleichung für Summen erhält man folgende Abschätzung,

$$\int_{B_j}\Big\{2|c(x)|+b\sum_{i=1}^{s}\big[|u_i^j(x)|^{p_i/p}+|u_i(x)|^{p_i/p}\big]\Big\}^p dx$$

$$\leqslant (2s+1)^{p-1}\int_{B_j}\Big\{2^p|c(x)|^p+b^p\sum_{i=1}^{s}\big[|u_i^j(x)|^{p_i}+|u_i(x)|^{p_i}\big]\Big\}dx =: G_j .$$

Da $c\in L_p(\Omega)$, $u_i^j, u_i \in L_{p_i}(\Omega)$ und $\mathrm{mes}B_j \to 0$ $(j\to\infty)$, folgt $G_j\to 0$ $(j\to\infty)$. Es gibt daher ein $j_0\in\mathbb{N}$, so daß für alle $j\in\mathbb{N}$ mit $j\geqslant j_0$ $G_j<\varepsilon^p$, bzw. $L_j<\varepsilon^p(\mathrm{mes}\Omega+1)$ gilt. Daraus folgt, daß

$$\|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u^j)\|_{L_p(\Omega)} = L_j^{1/p} < \varepsilon(\mathrm{mes}\Omega+1)^{1/p},$$

$\mathcal{F}$ ist also stetig. □

Das nächste Lemma liefert eine hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit des Nemytsky-Operators:

Lemma 3.2. $F:\Omega\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$ genüge folgenden Bedingungen:

(1) F ist stetig auf $\Omega\times\mathbb{R}^s$ und genügt der Ungleichung

$$|F(x,\xi)| \leqslant c\Big[1+\sum_{j=1}^{s}|\xi_j|^{p_j/p}\Big], \quad c\geqslant 0,\ 1\leqslant p\leqslant p_j<\infty. \tag{3.2}$$

(2) Für jedes $x\in\Omega$ ist F differenzierbar auf $\mathbb{R}^s$ mit auf $\Omega\times\mathbb{R}^s$ stetigen Ableitungen $F_j(x,\xi) := \partial F(x,\xi)/\partial\xi_j$, so daß

(a) falls $p_j=p$, gilt $F_j(x,\xi)=\tilde F_j(x)$ mit einer stetigen und beschränkten Funktion $\tilde F_j(x)$, $x\in\Omega$,

(b) für jedes $j\in\{1,\dots,s\}$ mit $p_j>p$ genügt F_j der Ungleichung

$$|F_j(x,\xi)| \leqslant d_j\Big[1+\sum_{i=1}^{s}|\xi_i|^{p_i/\tilde p_j}\Big], \quad d_j\geqslant 0, \quad \tilde p_j := \frac{pp_j}{p_j-p}>p. \tag{3.3}$$

Dann ist der Operator $\mathcal{F}:B\to L_p(\Omega)$, $(\mathcal{F}(u))(x):=F(x,u(x))$ stetig differenzierbar auf $B:=\prod_{j=1}^{s}L_{p_j}(\Omega)$ und die Ableitung ist gegeben durch

$$(D_B\mathcal{F}(u)u')(x) = \sum_{j=1}^{s}F_j(x,u(x))u_j'(x), \quad u=(u_1,\dots,u_s), u'=(u_1',\dots,u_s')\in B. \tag{3.4}$$

Beweis: Falls $1\leqslant k<s$ und $p_{k+1}=\dots=p_s=p$ ist, folgt aus Bedingung (2a), daß $F(x,\xi)=F_I(x,\xi_I)+F_{II}(x,\xi_{II})$ mit $\xi_I=(\xi_1,\dots,\xi_k)$, $\xi_{II}=(\xi_{k+1},\dots,\xi_s)$ und $F_{II}(x,\xi)=\sum_{j=k+1}^{s}\tilde F_j(x)\xi_j$. $\mathcal{F}$ läßt sich daher aufspalten in $\mathcal{F}(u)=\mathcal{F}_I(u_I)+\mathcal{F}_{II}(u_{II})$, wobei $u_I=(u_1,\dots,u_k)\in\prod_{j=1}^{k}L_{p_j}(\Omega)$, $u_{II}=(u_{k+1},\dots,u_s)\in(L_p(\Omega))^{s-k}$. Da die $\tilde F_j(x)$ stetig und beschränkt sind, ist $\mathcal{F}_{II}$ ein linearer, stetiger Operator von $(L_p(\Omega))^{s-k}$ nach $L_p(\Omega)$ und daher trivialerweise stetig differenzierbar. Es genügt daher, die Differenzierbarkeit von $\mathcal{F}_I$ zu zeigen, d.h. es kann oBdA angenommen werden,

daß $p_j > p$ für $1 \leq j \leq s$.

Wegen (3.2) ist $\mathcal{F}$ nach Theorem 3.1 stetig. Ebenso folgt aus (3.3), daß jedes $\mathcal{F}_j : B \to L_{\tilde{p}_j}$, $(\mathcal{F}_j(u))(x) := F_j(x,u(x))$ stetig ist. Zu $u=(u_1,\ldots,u_s) \in B$, $\varepsilon > 0$, gibt es daher ein $\delta > 0$, so daß $\|\mathcal{F}_j(u+u') - \mathcal{F}_j(u)\|_{L_{\tilde{p}_j}(\Omega)} < \varepsilon$ falls $\|u'\|_B := (\sum_{i=1}^s \|u_i'\|^p_{L_{p_i}(\Omega)})^{1/p} < \delta$ für $1 \leq j \leq s$ und $u'=(u_1',\ldots,u_s') \in B$. Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{F}(u+u') - \mathcal{F}(u) - \sum_{j=1}^s \mathcal{F}_j(u)u_j'\|^p_{L_p(\Omega)} \\
&= \int_\Omega |F(x,u(x)+u'(x)) - F(x,u(x)) - \textstyle\sum_{j=1}^s F_j(x,u(x))u_j'(x)|^p dx \\
&= \int_\Omega |\int_c^1 \textstyle\sum_{j=1}^s [F_j(x,u(x)+tu'(x)) - F_j(x,u(x))] u_j'(x) dt|^p dx \\
&\leq \int_\Omega \int_c^1 |\textstyle\sum_{j=1}^s [F_j(x,u(x)+tu'(x)) - F_j(x,u(x))]\, u_j'(x)|^p dt dx \\
&\leq s^{p-1} \int_\Omega \int_c^1 \textstyle\sum_{j=1}^s |[F_j(x,u(x)+tu'(x)) - F_j(x,u(x))] u_j'(x)|^p dt dx \\
&= s^{p-1} \int_c^1 \textstyle\sum_{j=1}^s \int_\Omega |F_j(x,u(x)+tu'(x)) - F_j(x,u(x))|^p |u_j'(x)|^p dx dt \\
&\leq s^{p-1} \int_c^1 \textstyle\sum_{j=1}^s \|\mathcal{F}_j(u+tu') - \mathcal{F}_j(u)\|^p_{L_{\tilde{p}_j}(\Omega)} \|u_j'\|^p_{L_{p_j}(\Omega)} dt \\
&< s^{p-1} \varepsilon^p \|u'\|^p_B, \quad \text{falls } \|u'\|_B < \delta .
\end{aligned}
$$

Die erste und dritte Ungleichung folgt aus der Hölder'schen Ungleichung für Integrale, wobei bei der dritten $p/p_j + p/\tilde{p}_j = 1$ benützt wurde. Die zweite Ungleichung folgt aus der Hölder'schen Ungleichung für Summen. Die Vertauschung der t- und x-Integration ist nach dem Satz von Fubini (vgl. [31]) erlaubt. Man erhält daher:

$$\|\mathcal{F}(u+u') - \mathcal{F}(u) - \textstyle\sum_{j=1}^s \mathcal{F}_j(u)u_j'\|_{L_p(\Omega)} < s^{(p-1)/p} \varepsilon \|u'\|_B \text{ für } \|u'\|_B < \delta,$$

d.h. (3.4) definiert die Ableitung von $\mathcal{F}$. Da $p/\tilde{p}_j + p/p_j = 1$ $(1 \leq j \leq s)$ gilt, ist für jedes $\tilde{w} \in L_{\tilde{p}_j}(\Omega)$, $w \in L_{p_j}(\Omega)$ das Produkt $\tilde{w}(x)w(x)$ aus $L_p(\Omega)$ und mit der Hölder'schen Ungleichung folgt $\|w\tilde{w}\|_{L_p(\Omega)} \leq \|\tilde{w}\|_{L_{\tilde{p}_j}(\Omega)} \|w\|_{L_{p_j}(\Omega)}$. Jedem $\tilde{w} \in L_{\tilde{p}_j}(\Omega)$ läßt sich somit ein linearer, stetiger Operator $L_j(\tilde{w}) \in \mathcal{L}(L_{p_j}(\Omega), L_p(\Omega))$ zuordnen vermöge $(L_j(\tilde{w})w)(x) := \tilde{w}(x)w(x)$ und die Abbildung $\tilde{w} \to L_j(\tilde{w})$ ist linear und stetig. Die Stetigkeit der $\mathcal{F}_j$ impliziert daher die Stetigkeit der Abbildung $B \to \mathcal{L}(B, L_p(\Omega))$: $u \to D_B\mathcal{F}(u)$, d.h. die Ableitung (3.4) von $\mathcal{F}$ ist stetig auf B. □

Unmittelbar folgt aus Lemma 3.2 das

Corrollar: Das Funktional $\mathcal{A} : B \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(u) := \int_\Omega F(x,u(x))dx$ ist stetig differenzierbar auf B mit

$$D_B\mathcal{A}(u)u' = \textstyle\sum_{j=1}^s \int_\Omega F_j(x,u(x))u_j'(x)dx .$$

Das nächste Lemma gibt eine hinreichende Bedingung dafür an, daß einer Funktion via Komposition eine differenzierbare Abbildung von $B' := C^m(\Omega) \times B$ nach $L_p(\Omega)$ zugeordnet werden kann, wobei $C^m(\Omega) := (C(\Omega))^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Lemma 3.3. $F:\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ genüge folgenden Bedingungen:
(1) F ist stetig auf $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$.
(2) F genügt der Ungleichung

$$|F(x,\eta,\xi)| \leqslant |g(x,\eta)|\left[1 + \sum_{j=1}^{s} |\xi_j|^{p_j/p}\right], \quad 1 \leqslant p, p_j < \infty, \tag{3.5}$$

für $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s) \in \mathbb{R}^s$, $x \in \Omega$, mit einer auf $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m$ stetigen Funktion g. Dann ist die Abbildung $\mathcal{F}: B' \to L_p(\Omega)$, $(\mathcal{F}(v,u))(x) := F(x,v(x),u(x))$ stetig, wobei $v = (v_1, \ldots, v_m) \in C^m(\Omega)$, $u = (u_1, \ldots, u_s) \in B$.

Beweis: Für $v \in C^m(\Omega)$, $u \in B$, gilt mit $K_p(v) := \left[\sup_{x \in \Omega} |g(x,v(x))|\right]^p < \infty$, daß

$$\int_\Omega |F(x,v(x),u(x))|^p dx \leqslant \int_\Omega |g(x,v(x))|^p \left[1 + \sum_{j=1}^{s} |u_j(x)|^{p_j/p}\right]^p dx$$
$$\leqslant K_p(v) \int_\Omega \left[1 + \sum_{j=1}^{s} |u_j(x)|^{p_j/p}\right]^p dx \leqslant K_p(v)(s+1)^{p-1} \int_\Omega \left[1 + \sum_{j=1}^{s} |u_j(x)|^{p_j/p}\right] dx.$$

Für $(v,u) \in B'$ ist demnach $\mathcal{F}(v,u) \in L_p(\Omega)$. Die Folge $(v^j, u^j) \in B'$, $j \in \mathbb{N}$, konvergiere in der Norm von B' gegen $(v,u) \in B'$, d.h. $v_i^j \to v_i$ $(j \to \infty)$ in $C(\Omega)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ und $u_k^j \to u_k$ $(j \to \infty)$ in $L_{p_k}(\Omega)$ $(1 \leqslant k \leqslant s)$. Dann gilt:

$$\|\mathcal{F}(v^j,u^j) - \mathcal{F}(v,u)\|_{L_p(\Omega)}^p = \int_\Omega |F(x,v^j(x),u^j(x)) - F(x,v(x),u(x))|^p dx$$
$$\leqslant 2^{p-1} \left\{ \int_\Omega |F(x,v(x),u^j(x)) - F(x,v(x),u(x))|^p dx \right.$$
$$\left. + \int_\Omega |F(x,v^j(x),u^j(x)) - F(x,v(x),u^j(x))|^p dx \right\}. \tag{3.6}$$

Die u_k^j bilden eine Cauchyfolge in $L_{p_k}(\Omega)$. Es gibt daher [31] zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein ε_1, $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon^p$, so daß $\int_A |u_k^j(x)|^p dx < \varepsilon^p$ für alle $j \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant s$ und jede meßbare Menge $A \subset \Omega$ mit $\mathrm{mes} A < \varepsilon_1$. Außerdem folgt aus der Konvergenz in $L_{p_k}(\Omega)$ die Konvergenz im Maß. Es gibt daher ein $j_1 \in \mathbb{N}$, so daß $\mathrm{mes} C_j < \varepsilon_1$ für $j \geqslant j_1$, wobei $C_j \subset \Omega$ die meßbare Menge $C_j := \{x \in \Omega \mid |u_k^j(x) - u_k(x)| \geqslant \varepsilon_1,\ 1 \leqslant k \leqslant s\}$ ist. Daraus folgt:

$$\int_{C_j} \left[1 + \sum_{k=1}^{s} |u_k^j(x)|^{p_k}\right] dx \leqslant (s+1)\varepsilon^p \quad \text{für } j \geqslant j_1. \tag{3.7}$$

Nach einem Theorem von Luisin (vgl. Vainberg [15]) gibt es zu ε_1 eine kompakte Menge $A_0 \subset \Omega$ mit $\mathrm{mes}(\Omega / A_0) < \varepsilon_1$, so daß jedes u_k auf A_0 stetig ist. Wegen der Kompaktheit von A_0 nimmt $|u_k|$ auf A_0 das Maximum an, d.h. es gilt $|u_k(x)| \leqslant K_1$ für alle $x \in A_0$, $1 \leqslant k \leqslant s$, mit einer positiven Konstanten K_1. Für alle $x \in \Omega / (C_j \cup (\Omega / A_0)) := A_j \subset A_0$ $(j \geqslant j_1)$ gilt somit $|u^j(x)| \leqslant |u_k(x)| + |u_k^j(x) - u_k(x)| \leqslant K_1 + \varepsilon_1 =: K_2$ $(1 \leqslant k \leqslant s)$. Wegen der Konvergenz der v^j in $C^m(\Omega)$ gibt es ein $K_3 > 0$, so daß $|v_i^j(x)| \leqslant K_3$ für $1 \leqslant i \leqslant m$, $j \in \mathbb{N}$. Setze $U := \left\{\xi \in \mathbb{R}^s \mid \sum_{k=1}^{s} |\xi_k| \leqslant K_2\right\}$, $V := \left\{\eta \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^{m} |\eta_i| \leqslant K_3\right\}$. F ist auf $\bar{\Omega} \times V \times U$ gleichmäßig stetig. Es gibt daher ein $\varepsilon_2 > 0$, so daß $|F(x,\eta',\xi) - F(x,\eta,\xi)| < \varepsilon$ für alle $(x,\xi) \in \bar{\Omega} \times U$ und alle $\eta, \eta' \in V$

mit $|\eta_i - \eta_i'| < \varepsilon_2$, $1 \leq i \leq s$. Wegen $v^j \to v$ $(j \to \infty)$ in $C^m(\Omega)$ gibt es zu ε_2 ein $j_2 \in \mathbb{N}$, so daß $|v_i^j(x) - v_i(x)| < \varepsilon_2$ für alle $x \in \Omega$, $j \geq j_2$, $1 \leq i \leq m$. Daraus folgt:

$$|F(x,v^j(x),u^j(x)) - F(x,v(x),u^j(x))| < \varepsilon \ , \ x \in A_j, \ j \geq j_2. \tag{3.9}$$

$g(x,\eta)$ ist stetig auf $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m$ und daher gleichmäßig stetig auf $\bar{\Omega} \times V$. Da $v^j(x) \in V$ für alle $x \in \Omega$, $j \in \mathbb{N}$, ist $|g(x,v^j(x))|$ und $|g(x,v(x))|$ gleichmäßig beschränkt, d.h. es gilt

$$|g(x,v^j(x))| + |g(x,v(x))| \leq K_4, \ j \in \mathbb{N}, \ x \in \Omega, \tag{3.10}$$

mit einer positiven Konstanten K_4. Aus (3.6)-(3.10) folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |F(x,v^j(x),u^j(x)) - F(x,v(x),u^j(x))|^p dx \\
&= \Big(\int_{A_j} + \int_{C_j \cup (\Omega / A_o)} \Big) |F(x,v^j(x),u^j(x)) - F(x,v(x),u^j(x))|^p dx \\
&\leq \varepsilon^p \operatorname{mes}\Omega + \Big(\int_{C_j} + \int_{\Omega / A_o} \Big) \Big\{ \big[|g(x,v^j(x))| + |g(x,v(x))| \big] \big[1 + \textstyle\sum_{k=1}^s |u_k^j(x)|^{p_k/p} \big] \Big\}^p dx \\
&\leq \varepsilon^p \operatorname{mes}\Omega + 2K_4{}^p (s+1)^{p-1} \Big(\int_{C_j} + \int_{\Omega / A_o} \Big) \big[1 + \sum_{k=1}^s |u_k^j(x)|^{p_k} \big] dx \\
&\leq \varepsilon^p \big[\operatorname{mes}\Omega + 2(K_4(s+1))^p \big] \quad \text{für } j \geq j_3 := \max\{j_1, j_2\}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Die Funktion $F_v(x,\xi) := F(x,v(x),\xi)$ genügt der Ungleichung

$$|F_v(x,\xi)| \leq K_4 \big[1 + \sum_{k=1}^s |\xi_k|^{p_k/p} \big].$$

Daraus folgt nach Theorem 3.1 die Existenz eines $j_4 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\int_\Omega |F(x,v(x),u^j(x)) - F(x,v(x),u(x))|^p dx < \varepsilon^p \text{ für } j \geq j_4. \tag{3.12}$$

Aus (3.6), (3.11), (3.12) erhält man für $j \geq j_5 := \max\{j_3, j_4\}$, daß $\| \mathcal{F}(v^j,u^j) - \mathcal{F}(v,u) \|_{L_p(\Omega)} < K_5 \varepsilon$ mit einer positiven Konstanten K_5, $\mathcal{F}$ ist daher stetig. □

Das nächste Lemma liefert eine hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit von $\mathcal{F}$:

Lemma 3.4. $F: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$ erfülle die Voraussetzungen von Lemma 3.3, wobei $p \leq p_j$ für $1 \leq j \leq s$. Zusätzlich sei F für jedes $x \in \bar{\Omega}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$ und die Ableitungen $F_i^1(x,\eta,\xi) := \partial F(x,\eta,\xi)/\partial \eta_i$ $(1 \leq i \leq m)$, $F_j^2(x,\eta,\xi) := \partial F(x,\eta,\xi)/\partial \xi_j$ $(1 \leq j \leq s)$ seien stetig auf $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$. F_i^1 genüge der Ungleichung

$$|F_i^1(x,\eta,\xi)| \leq |g_i^1(x,\eta)| \big[1 + \sum_{k=1}^s |\xi_k|^{p_k/p} \big], \tag{3.13}$$

mit auf $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m$ stetigen Funktionen g_i^1, $1 \leq i \leq m$. Für $j \in \{1,\dots,s\}$ mit $p_j > p$ erfülle F_j^2 die Ungleichung

$$|F_j^2(x,\eta,\xi)| \leq |g_j^2(x,\eta)| \big[1 + \sum_{k=1}^s |\xi_k|^{p_k/\tilde{p}_j} \big], \quad \tilde{p}_j := \frac{p p_j}{p_j - p} > p, \tag{3.14a}$$

mit auf $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m$ stetigen Funktionen g_j^2. Für $j \in \{1,\dots,s\}$ mit $p_j = p$ gelte

$$F_j^2(x,\eta,\xi) = \tilde{F}_j^2(x,\eta), \tag{3.14b}$$

wobei die $\tilde{F}^2_j$ stetig auf $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m$ und für jedes $x \in \bar{\Omega}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}^m$ seien mit auf $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m$ stetigen Ableitungen. Dann ist der Operator $\mathcal{F}$ von Lemma 3.3 stetig differenzierbar auf B' und die Ableitung ist gegeben durch

$$D_B\mathcal{F}(v,u)(v',u') = \mathcal{F}_1(v,u)v' + \mathcal{F}_2(v,u)u', \quad (v,u),(v',u') \in B', \tag{3.15}$$

wobei

$$(\mathcal{F}_1(v,u)v')(x) := (D_{C^m(\Omega)}\mathcal{F}(v,u)v')(x) = \sum_{i=1}^{m} F^1_i(x,v(x),u(x))v'_i(x) \tag{3.16a}$$

$$(\mathcal{F}_2(v,u)u')(x) := (D_B\mathcal{F}(v,u)u')(x) = \sum_{j=1}^{s} F^2_j(x,v(x),u(x))u'_j(x)\,. \tag{3.16b}$$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß $p_j > p$ für $1 \leq j \leq s$. Die Operatoren $\mathcal{F}_{1i}: B' \to L_{p_i}(\Omega)$, $\mathcal{F}_{2j}: B' \to L_{p_j}(\Omega)$ werden definiert durch

$$(\mathcal{F}_{1i}(v,u))(x) := F^1_i(x,v(x),u(x)), \quad v \in C^m(\Omega),\ u \in B,\ 1 \leq i \leq m,$$

$$(\mathcal{F}_{2j}(v,u))(x) := F^2_j(x,v(x),u(x)), \quad v \in C^m(\Omega),\ u \in B,\ 1 \leq j \leq s.$$

Wegen (3.13), (3.14a) sind die $\mathcal{F}_{1i}$, $\mathcal{F}_{2j}$ nach Lemma 3.3 stetig.

(1) Für jedes $w \in L_p(\Omega)$, $\tilde{w} \in C(\Omega)$ ist das Produkt $w(x)\tilde{w}(x)$ aus $L_p(\Omega)$ und es gilt $\|w\tilde{w}\|_{L_p(\Omega)} \leq \|w\|_{L_p(\Omega)}\|\tilde{w}\|_{C(\Omega)}$, d.h. jedem $w \in L_p(\Omega)$ läßt sich ein linearer, stetiger Operator $L(w) \in \mathcal{L}(C(\Omega), L_p(\Omega))$ zuordnen vermöge $(L(w)\tilde{w})(x) := w(x)\tilde{w}(x)$ und die Abbildung $w \to L(w)$ ist linear und stetig. Die Stetigkeit der $\mathcal{F}_{1i}$ impliziert daher die Stetigkeit der Abbildung $\mathcal{F}_1: B' \to \mathcal{L}(C^m(\Omega), L_p(\Omega))$. Weiterhin garantiert die Stetigkeit der $\mathcal{F}_{1i}$, daß zu $(v,u) \in B'$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß $\|\mathcal{F}_{1i}(v+v',u) - \mathcal{F}_{1i}(v,u)\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$ falls $\|v'\|_{C^m(\Omega)} := \sum_{k=1}^{m}\|v'_k\|_{C(\Omega)} < \delta$ für $1 \leq i \leq m$. Mit einer zum Beweis von Lemma 3.2 analogen Abschätzung erhält man daraus, daß

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{F}(v+v',u) - \mathcal{F}(v,u) - \mathcal{F}_1(v,u)v'\|^p_{L_p(\Omega)} \\
&= \int_\Omega |F(x,v(x)+v'(x),u(x)) - F(x,v(x),u(x)) - \textstyle\sum_{i=1}^m F^1_i(x,v(x),u(x))v'_i(x)|^p dx \\
&= \int_\Omega \Big| \int_0^1 \textstyle\sum_{i=1}^m \big[F^1_i(x,v(x)+tv'(x),u(x)) - F^1_i(x,v(x),u(x))\big]v'_i(x)dt\Big|^p dx \\
&\leq m^{p-1}\int_0^1 \Big\{\textstyle\sum_{i=1}^m \int_\Omega |F^1_i(x,v(x)+tv'(x),u(x)) - F^1_i(x,v(x),u(x))|^p |v'_i(x)|^p dx\Big\}dt \\
&\leq m^{p-1}\varepsilon^p \textstyle\sum_{i=1}^m \big[\sup_{x\in\Omega}|v'_i(x)|\big]^p \mathrm{mes}\,\Omega \leq m^{p-1}\varepsilon^p\|v'\|^p_{C^m(\Omega)}\mathrm{mes}\,\Omega,
\end{aligned}$$

$\mathcal{F}_1$ ist daher die auf B' stetige partielle Ableitung von $\mathcal{F}$ bzgl. $C^m(\Omega)$.

(2) Zu gegebenem $v \in C^m(\Omega)$ erfüllt $F_v(x,\xi) := F(x,v(x),\xi)$ mit $c := \sup_{x\in\Omega}|g(x,v(x))|$ die Ungleichung (3.2). $\mathcal{F}(v,u)$ ist somit nach Lemma 3.2 partiell differenzierbar bzgl. B und die Ableitung ist gegeben durch (3.16b). Analog zum Beweis von Lemma 3.2 zeigt man, daß die Stetigkeit der $\mathcal{F}_{1j}$ $(1 \leq j \leq s)$ die Stetigkeit der Abbildung $\mathcal{F}_1: B' \to \mathcal{L}(B, L_p(\Omega))$ nach sich zieht.

(3) Nach (1) und (2) existieren die partiellen Ableitungen von $\mathcal{F}$ bzgl. $C^m(\Omega)$ und B und sind auf B' stetig. $\mathcal{F}$ ist somit stetig differenzierbar auf B' und die

Ableitung ist gegeben durch (3.15) mit (3.16a).

(4) Falls $p_{k+1}=\ldots=p_s=p$ und $p_j>p$ für $1\leq j\leq k$, gilt nach (3.14b), daß $F(x,\eta,\xi)=F_I(x,\eta,\xi_I)+F_{II}(x,\eta,\xi_{II})$ mit $\xi_I=(\xi_1,\ldots,\xi_k)$, $\xi_{II}=(\xi_{k+1},\ldots,\xi_s)$ und $F_{II}(x,\eta,\xi_{II})=\sum_{j=k+1}^{s}\tilde{F}_j(x,\eta)\xi_j$. Wir können daher $\mathcal{F}$ aufspalten in $\mathcal{F}(v,u)=\mathcal{F}_I(v,u_I)+\mathcal{F}_{II}(v,u_{II})$, wobei $u_I\in L_{p_1}(\Omega)\times\ldots\times L_{p_k}(\Omega)=:B_I$ und $u_{II}\in(L_p(\Omega))^{s-k}=:B_{II}$. $\mathcal{F}_I$ ist stetig differenzierbar nach (3) und $\mathcal{F}_{II}$ ist für jedes $v\in C^m(\Omega)$ linear und stetig bzgl. $u_{II}\in B_{II}$ und daher trivialerweise partiell differenzierbar bzgl. B_{II}. Nach Lemma 3.3 ist die partielle Ableitung von $\mathcal{F}_{II}$ bzgl. B_{II} stetig auf $B_{II}\times C^m(\Omega)$. Daß $\mathcal{F}_{II}$ stetig differenzierbar ist bzgl. $C^m(\Omega)$ folgt analog zu (1). □

Unmittelbar folgt aus Lemma 3.4 das

Corollar. Das Funktional $\mathfrak{A}:B'\longrightarrow\mathbb{R}$, $\mathfrak{A}(v,u):=\int_\Omega F(x,v(x),u(x))dx$ ist stetig differenzierbar auf B' und die Ableitung ist gegeben durch

$$D_{B'}\mathfrak{A}(v,u)(v',u')=\int_\Omega\Big\{\sum_{i=1}^{m}F_i^1(x,v(x),u(x))v_i'(x)+\sum_{j=1}^{s}F_j^2(x,v(x),u(x))u_j'(x)\Big\}dx.$$

3.3 Funktionale und Operatoren auf Sobolew-Räumen

Bezeichnungen: Es sei $l\in\mathbb{N}_0$, $n\in\mathbb{N}$. $M_1(l,n):=\binom{n+l-1}{n-1}$ ist die Anzahl aller Multiindices $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ mit $\alpha_j\in\mathbb{N}_0$ und $|\alpha|=l$. Vektoren aus $\mathbb{R}^{M_1(l,n)}$ werden geschrieben als $(\xi_{\alpha_1},\xi_{\alpha_2},\ldots)$, $\xi_{\alpha_k}\in\mathbb{R}$, wobei die α_k alle Multiindices mit $|\alpha_k|=l$ in irgendeiner i.F. festen Reihenfolge durchlaufen. Für $m\in\mathbb{N}_0$, $n\in\mathbb{N}$, setze $M(m,n):=\sum_{l=0}^{m}M_1(l,n)=\binom{n+m}{m}$. Vektoren aus $\mathbb{R}^{M(m,n)}$ werden geschrieben als $(\xi_{(0)},\xi_{(1)},\ldots\ldots\xi_{(m)})$ mit $\xi_{(l)}\in\mathbb{R}^{M_1(l,n)}$, $0\leq l\leq m$, und für $X\in\mathbb{R}^{sM(m,n)}$ setze $X=(\xi^1,\ldots,\xi^s)$, $\xi^j\in\mathbb{R}^{M(m,n)}$. Ω sei i.F. stets eine beschränkte, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die der Kegelbedingung genügt. Für $u\in D'(\Omega)$, $l\in\mathbb{N}_0$, bezeichne $\partial^{(l)}u(x)$ das $M_1(l,n)$-tupel $\partial^{(l)}u(x):=(\partial^{\alpha_1}u(x),\partial^{\alpha_2}u(x),\ldots)$ (Ableitungen im verallgemeinerten Sinne), wobei die α_i alle Multiindices mit $|\alpha_i|=l$ durchlaufen. Mit $\partial^{[m]}u(x)$, $m\in\mathbb{N}_0$, wird das $M(m,n)$-tupel $\partial^{[m]}u(x):=(u(x),\partial^{(1)}u(x),\ldots,\partial^{(m)}u(x))$ abgekürzt. Ist speziell $u\in W_p^r(\Omega)$, $r\geq m$, so ist $\partial^{[m]}u(x)\in\mathbb{R}^{M(m,n)}$ f.ü. in Ω. Für $u(x)=(u_1(x),\ldots,u_s(x))$, $u_j\in D'(\Omega)$, setze $\partial^{[m]}u(x):=(\partial^{[m]}u_1(x),\ldots\ldots,\partial^{[m]}u_s(x))$.

(1) Funktionale auf $W_2^{m,s}(\Omega)$.

In Kap. 4.2 wird sich herausstellen, daß Theorem 2.2 unter gewissen Voraussetzungen auf Funktionale angewandt werden kann, die auf $W_2^{m,s}(\Omega)$ definiert und dort $\mathcal{C}^\infty$ sind. Wir geben deshalb eine hinreichende Bedingung an, unter der solche Funktionale beliebig stetig differenzierbar sind.

Es sei $m\in\mathbb{N}_0$. Falls $m-n/2>0$ gilt, setze $m_0=m_0(m,n):=\max\{l\in\mathbb{N}_0\,|\,l<m-n/2\}$ und $(\tilde{\eta},\tilde{\xi}):=(\xi_{(0)},\ldots,\xi_{(m)})\in\mathbb{R}^{M(m,n)}$, wobei $\tilde{\eta}:=(\xi_{(0)},\xi_{(1)},\ldots,\xi_{(m)})\in\mathbb{R}^{M(m_0,n)}$,

$\tilde{\xi} := (\xi_{(m_0+1)}, \ldots, \xi_{(m)}) \in \mathbb{R}^{M(m,n)-M(m_0,n)}$. Für $X=(\xi^1, \ldots, \xi^s) \in \mathbb{R}^{sM(m,n)}$ mit $\xi^j = (\tilde{\eta}^j, \tilde{\xi}^j) \in \mathbb{R}^{M(m,n)}$ setze $X=(\eta, \xi)$, wobei $\xi = (\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^s)$, $\eta = (\tilde{\eta}^1, \ldots, \tilde{\eta}^s)$.

Def. 3.1. Es seien $s,m,n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $F: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{sM(m,n)} \to \mathbb{R}$ gehört zur Klasse $\mathcal{H}(\Omega, s, m)$, wenn folgendes gilt:

(1) Falls $m-n/2 > 0$ gilt, ist F für jedes $(x, \eta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{sM(m_0,n)}$ ein Polynom in $\xi \in \mathbb{R}^{sM(m,n)-sM(m_0,n)}$

$$F(x,\eta,\xi) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x,\eta) \prod_{l=1}^{s} \prod_{m_0 < |\alpha| \leq m} (\xi_\alpha^l)^{r(l,\alpha,j)}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{3.17}$$

und die Exponenten $r(l,\alpha,j)$ der Monome in (3.17) genügen der Ungleichung

$$\sum_{l=1}^{s} \sum_{m_0 < |\alpha| \leq m} \frac{r(l,\alpha,j)}{p_{|\alpha|}} \leq 1, \quad 1 \leq j \leq N, \tag{3.18a}$$

wobei $p_{|\alpha|} := 2n/[n-2(m-|\alpha|)] \geq 2$ für jeden n-Multiindex α mit $|\alpha| > m-n/2$. Falls $|\alpha| = m-n/2$, ist $p_{|\alpha|} \in]2, \infty[$ beliebig. Außerdem ist F_j für jedes $x \in \bar{\Omega}$ beliebig oft differenzierbar bzgl. der Komponenten von $\eta \in \mathbb{R}^{sM(m_0,n)}$ und alle Ableitungen sind stetig auf $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{sM(m_0,n)}$.

(2) Falls $m-n/2 \leq 0$ gilt, ist F ein Polynom in $X \in \mathbb{R}^{sM(m,n)}$,

$$F(x,X) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x) \prod_{l=1}^{s} \prod_{0 \leq |\alpha| \leq m} (\xi_\alpha^l)^{r(l,\alpha,j)}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{3.19}$$

und die Exponenten der Monome in (3.19) genügen der Ungleichung

$$\sum_{l=1}^{N} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \frac{r(l,\alpha,j)}{p_{|\alpha|}} \leq 1, \quad 1 \leq j \leq N. \tag{3.18b}$$

Außerdem ist F_j stetig auf $\bar{\Omega}$.

Theorem 3.2. Es sei $F \in \mathcal{H}(\Omega, s, m)$. Dann ist das Funktional

$$\mathcal{A}: W_2^{m,s}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{A}(u) := \int_\Omega F(x, \partial^{[m]} u(x)) dx,$$

$u := (u_1, \ldots, u_s) \in W_2^{m,s}(\Omega)$, beliebig oft stetig differenzierbar auf $W_2^{m,s}(\Omega)$.

Beweis: Der Beweis wird für $m-n/2 > 0$ durchgeführt, für $m-n/2 \leq 0$ verläuft er analog. (1) Für jeden Ausdruck der Form $y_1^{r_1} \ldots y_t^{r_t}$, $y_i \in \mathbb{R}$, $r_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{t} r_i/p_i \leq 1$, $p_1, \ldots, p_t \in [1, \infty[$, gilt nach der Young'schen Ungleichung:

$$|y_1^{r_1} \ldots y_t^{r_t}| \leq 1 + \sum_{i=1}^{t} (r_i/p_i) |y_i|^{p_i}. \tag{3.20}$$

Mit (3.17), (3.18) und (3.20) folgt die Existenz von stetigen Funktionen $\hat{g}_\alpha^i(x,\eta)$ $(1 \leq i \leq s, m_0 < |\alpha| \leq m)$, $g_0(x,\eta)$, so daß

$$|F(x,\eta,\xi)| \leq |g_0(x,\eta)| + \sum_{\substack{m_0 < |\alpha| \leq m \\ 1 \leq i \leq s}} |\hat{g}_\alpha^i(x,\eta)| \, |\xi_\alpha^i|^{p_{|\alpha|}} \tag{3.21}$$

gilt. Die Funktion

$$g(x,\eta) := |g_0(x,\eta)| + \max\{|\hat{g}_\alpha^i(x,\eta)| \mid m_0 < |\alpha| \leq m, \, 1 \leq i \leq s\}$$

ist ebenfalls stetig und mit (3.21) folgt, daß

$$|F(x,\eta,\xi)| \leq g(x,\eta)\Big[1 + \sum_{i=1}^{s} \sum_{m_0<|\alpha|\leq m} |\xi_\alpha^i|^{p_{|\alpha|}}\Big]. \tag{3.22}$$

Analog läßt sich die Existenz einer stetigen nichtnegativen Funktion $g_\alpha^i(x,\eta)$ $(1\leq i\leq s,\ 0\leq|\alpha|\leq m_0)$ nachweisen, so daß

$$|\partial F(x,\eta,\xi)/\partial\xi_\alpha^i| \leq g_\alpha^i(x,\eta)\Big[1 + \sum_{k=1}^{s} \sum_{m_0<|\beta|\leq m} |\xi_\beta^k|^{p_{|\beta|}}\Big], \tag{3.23}$$

wobei $0\leq|\alpha|\leq m_0$. Für jeden Multiindex α mit $m_0<|\alpha|\leq m$ ergibt sich für die partielle Ableitung von F nach ξ_α^i ebenfalls ein Polynom in den ξ_β^i $(m_0<|\beta|\leq m)$,

$$\partial F(x,\eta,\xi)/\partial\xi_\alpha^i = \sum_{j=1}^{\bar N(i,\alpha)} F_{j\alpha}^i(x,\eta) \prod_{l=1}^{s} \prod_{m_0<|\beta|\leq m} (\xi_\beta^l)^{\bar r(l,\beta,j)},\quad \bar N(i,\alpha)\in\mathbb{N}, \tag{3.24}$$

wobei die $F_{j\alpha}^i$ stetig auf $\bar\Omega\times\mathbb{R}^{sM(m_0,n)}$, und die Exponenten $\bar r(l,\beta,j)$ der Monome in (3.24) der Ungleichung

$$\sum_{l=1}^{s} \sum_{m_0<|\beta|\leq m} \frac{\bar r(l,\beta,j)}{p_{|\beta|}} + \frac{1}{p_{|\alpha|}} \leq 1,\quad 1\leq j\leq\bar N(i,\alpha), \tag{3.25}$$

genügen, woraus sofort

$$\sum_{l=1}^{s} \sum_{m_0<|\beta|\leq m} \frac{\bar r(l,\beta,j)}{p_{|\beta|}}\, q_{|\alpha|} \leq q_{|\alpha|}\Big(1-\frac{1}{p_{|\alpha|}}\Big) = 1 \tag{3.26}$$

folgt, wobei $q_{|\alpha|} := p_{|\alpha|}/(p_{|\alpha|}-1)\leq 2$. Aus (3.26) ergibt sich mit der Young'schen Ungleichung, daß

$$\prod_{l=1}^{s} \prod_{m_0<|\beta|\leq m} |\xi_\beta^l|^{\bar r(l,\beta,j)} \leq 1 + q_{|\alpha|} \sum_{l=1}^{s} \sum_{m_0<|\beta|\leq m} \frac{\bar r(l,\beta,j)}{p_{|\beta|}} |\xi_\beta^l|^{p_{|\beta|}/q_{|\alpha|}}. \tag{3.27}$$

Analog zur Herleitung von (3.22) folgt aus (3.24) und (3.27) die Existenz einer stetigen und nichtnegativen Funktion $g_\alpha^i(x,\eta)$, $m_0<|\alpha|\leq m$, $1\leq i\leq s$, so daß gilt:

$$|\partial F(x,\eta,\xi)/\partial\xi_\alpha^i| \leq g_\alpha^i(x,\eta)\Big[1 + \sum_{l=1}^{s} \sum_{m_0<|\beta|\leq m} |\xi_\beta^l|^{p_{|\beta|}/q_{|\alpha|}}\Big] \tag{3.28}$$

für $1\leq i\leq s$ und $m_0<|\alpha|\leq m$.

(2) Nach dem Sobolew'schen Einbettungslemma ist für $u'\in W_2^m(\Omega)$ jedes $\partial^\alpha u'$ mit $|\alpha|<m-n/2$ in $C(\Omega)$, jedes $\partial^\alpha u'$ mit $|\alpha|\geq m-n/2$ in $L_{p_{|\alpha|}}(\Omega)$ und die Abbildungen $W_2^m(\Omega)\to C(\Omega)$, $u'\to\partial^\alpha u'$ $(|\alpha|<m-n/2)$ bzw. $W_2^m(\Omega)\to L_{p_{|\alpha|}}(\Omega)$, $u'\to\partial^\alpha u'$ $(|\alpha|\geq m-n/2)$ sind stetig. Setzt man daher

$$B := \prod_{m_0<|\alpha|\leq m} (L_{p_{|\alpha|}}(\Omega))^s,\quad B' := C^{sM(m_0,n)}(\Omega)\times B,$$

so läßt sich $\mathfrak{R}$ darstellen als $\mathfrak{R}(u)=\tilde{\mathfrak{R}}(Eu)$, wobei E der lineare und stetige Operator $E:W_2^{m,s}(\Omega)\to B'$, $Eu := \partial^{[m]}u$ und $\tilde{\mathfrak{R}}$ das Funktional $\tilde{\mathfrak{R}}:B'\to\mathbb{R}$, $\tilde{\mathfrak{R}}(v,w) := \int_\Omega F(x,v(x),w(x))dx$ ist mit $v\in C^{sM(m_0,n)}(\Omega)$, $w\in B$. Die Ungleichungen (3.22), (3.23) und (3.28) implizieren aber, daß F die Voraussetzungen von Lemma 3.4 mit $p=1$ erfüllt, d.h. $\tilde{\mathfrak{R}}$ ist nach dem Corrollar von Lemma 3.4 stetig differenzierbar. Wegen der Stetigkeit von E ist daher auch $\mathfrak{R}$ stetig differenzierbar.

(3) Der Rest des Theorems folgt durch vollständige Induktion: Es sei $\mathfrak{A}$ bis zur Ordnung $l \geq 1$ stetig differenzierbar mit

$$D^l_{W_2^{m,s}(\Omega)} \mathfrak{A}(u) v_1 \ldots v_l = \int_\Omega F^{(l)}(x, \partial^{[m]} u(x), \partial^{[m]} v_1(x), \ldots, \partial^{[m]} v_l(x)) dx,$$

$u, v_j \in W_2^{m,s}(\Omega)$ $(1 \leq j \leq l)$, wobei $F^{(l)}: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{sM(m,n)} \times \mathbb{R}^{lsM(m,n)} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch die l-te totale Ableitung $D^l F(x,X)$ von F bzgl. $\mathbb{R}^{sM(m,n)}$ definiert ist, d.h. $F^{(l)}(x, X, X_1, \ldots, X_l) := D^l F(x,X) X_1 \ldots X_l$, $X, X_1, \ldots, X_l \in \mathbb{R}^{sM(m,n)}$. Benützt man die Regeln für partielle Ableitungen von Polynomen, so zeigt man leicht, daß $F^{(l)} \in \mathcal{P}(\Omega, s(l+1), m)$. Das Funktional

$$\mathfrak{A}^{(l)}: W_2^{m,s(l+1)}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{A}^{(l)}(u, v_1, \ldots, v_l) := D^l_{W_2^{m,s}(\Omega)} \mathfrak{A}(u) v_1 \ldots v_l$$

ist demnach nach (1) und (2) stetig differenzierbar und daraus folgt bereits, daß $\mathfrak{A}$ (l+1)-mal stetig differenzierbar ist. □

(2) Funktionale und Operatoren auf $W_p^{2m,s}(\Omega)$.

Theorem 2.3 läßt sich unter geeigneten Voraussetzungen auf Funktionale und Operatoren anwenden, die auf $W_p^{2m,s}(\Omega)$ definiert und dort $\mathcal{C}^\infty$ sind. Es wird deshalb eine hinreichende Bedingung angegeben, unter der solche Funktionale und Operatoren beliebig oft stetig differenzierbar sind.

Def. 3.2. Es seien $s,m,n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $F: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{sM(m,n)} \longrightarrow \mathbb{R}$ gehört zur Klasse $\mathcal{P}(\Omega, s, m)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Für jedes $x \in \Omega$ ist F beliebig oft stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^{sM(m,n)}$ und alle Ableitungen bzgl. $\mathbb{R}^{sM(m,n)}$ sind für jedes $X \in \mathbb{R}^{sM(m,n)}$ aus $C_m(\Omega)$.
(2) Alle in (1) als existent vorausgesetzten Ableitungen sind stetig auf $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{sM(m,n)}$.

Theorem 3.3. Die Funktionen $F^i_\alpha(x,X)$, $1 \leq i \leq s$, seien aus $\mathcal{P}(\Omega, s, m)$, wobei α alle n-Multiindices mit $|\alpha| \leq m \in \mathbb{N}$ durchlaufe. Dann ist für $p \in]n, \infty[$ der Operator

$$\mathcal{F}: W_p^{2m,s}(\Omega) \longrightarrow (L_p(\Omega))^s, \quad (\mathcal{F}(u))_i(x) := \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha F^i(x, \partial^{[m]} u(x))$$

beliebig stetig differenzierbar auf $W_p^{2m,s}(\Omega)$.

Beweis: Für $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_s) \in C^s_{2m}(\Omega)$ gilt nach der Kettenregel, daß

$$(\mathcal{F}(\tilde{u}))_i(x) = \tilde{F}^i(x, \partial^{[2m-1]} \tilde{u}(x)) + \sum_{j=1}^{s} \sum_{|\alpha|=2m} \tilde{F}^{ij}_\alpha(x, \partial^{[m]} \tilde{u}(x)) \partial^\alpha \tilde{u}_j(x), \quad (3.29)$$

mit Funktionen $\tilde{F}^i \in \mathcal{P}(\Omega, s, 2m-1)$, $\tilde{F}^{ij}_\alpha \in \mathcal{P}(\Omega, s, m)$. Nach dem Sobolew-Lemma ist für $u' \in W_p^{2m}(\Omega)$ jedes $\partial^\alpha u'$ mit $0 \leq |\alpha| \leq 2m-1$ aus $C(\Omega)$, jedes $\partial^\alpha u'$ mit $|\alpha| = 2m$ aus $L_p(\Omega)$ und die Abbildungen $W_p^{2m}(\Omega) \to C(\Omega)$, $u' \to \partial^\alpha u'$ $(|\alpha| \leq 2m-1)$, bzw. $W_p^{2m}(\Omega) \to L_p(\Omega)$, $u' \to \partial^\alpha u'$ $(|\alpha| = 2m)$ sind stetig. Der Ausdruck (3.29) ist daher auch wohldefiniert für $u \in W_p^{2m,s}(\Omega)$ und in $L_p(\Omega)$. Setze $Y := (Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^{sM(2m,n)}$,

wobei $Y_1 \in \mathbb{R}^{sM(2m-1,n)}$, $Y_2 \in \mathbb{R}^{sM_1(2m,n)}$, und definiere die Funktionen $\hat{F}_i \in \mathcal{P}(\Omega,s,2m)$ $(1 \leq i \leq s)$ durch

$$\hat{F}_i(x,Y) := \tilde{F}^i(x,Y_1) + \sum_{j=1}^{s} \sum_{|\alpha|=2m} F_\alpha^{ij}(x,Y_1)\, \xi_\alpha^j \quad . \tag{3.30}$$

Aus (3.30) folgt die Existenz einer stetigen Funktion $g_i(x,Y_1)$ $(1 \leq i \leq s)$, so daß

$$|\hat{F}_i(x,Y)| \leq |g_i(x,Y_1)| \Big[1 + \sum_{j=1}^{s} \sum_{|\alpha|=2m} |\xi_\alpha^j|\Big] \quad . \tag{3.31}$$

Setze $B' := \hat{B} \times B$, wobei $\hat{B} := C^{sM(2m-1,n)}(\Omega)$, $B := (L_p(\Omega))^{sM_1(2m,n)}$, und definiere den Operator $\hat{\mathcal{F}}_i : B' \longrightarrow L_p(\Omega)$ durch $(\hat{\mathcal{F}}_i(v,w))(x) := \hat{F}_i(x,v(x),w(x))$ $(1 \leq i \leq s,\ v \in \hat{B},\ w \in B)$. Wegen (3.31) ist $\hat{\mathcal{F}}_i$ nach Lemma 3.4 stetig differenzierbar auf B'. Da andrerseits der lineare Operator $E : W_p^{2m,s}(\Omega) \to B'$, $u \longrightarrow \partial^{[2m]}u$ stetig ist, ist $\mathcal{F}$ ebenfalls stetig differenzierbar. Daß $\mathcal{F}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist, läßt sich analog zum Beweis von Theorem 3.2 unter Verwendung der Differenzierbarkeitseigenschaften der F_α^i durch vollständige Induktion nachweisen. □

Theorem 3.4. Es sei $F \in \mathcal{P}(\Omega,s,m)$ und $p \in]n,\infty[$. Dann ist das Funktional

$$\mathfrak{A} : W_p^{2m,s}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{A}(u) := \int_\Omega F(x, \partial^{[m]}u(x))dx$$

beliebig oft stetig differenzierbar.

Beweis: Nach dem Sobolew-Lemma ist für $\tilde{u} \in W_p^{2m}(\Omega)$ jedes $\partial^\alpha \tilde{u}$ mit $|\alpha| \leq m$ in $C(\Omega)$ und die lineare Abbildung $W_p^{2m}(\Omega) \to C(\Omega)$, $\tilde{u} \to \partial^\alpha \tilde{u}$, ist stetig. Der lineare Operator $W_p^{2m,s}(\Omega) \to C^{sM(m,n)}(\Omega)$, $u \to \partial^{[m]}u$ ist daher ebenfalls stetig. Nach dem Corrollar von Lemma 3.4 ist das Funktional

$$\tilde{\mathfrak{A}} : C^{sM(m,n)}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{\mathfrak{A}}(v) := \int_\Omega F(x,v(x))dx, \quad v \in C^{sM(m,n)}(\Omega),$$

stetig differenzierbar und somit ist auch $\mathfrak{A}$ stetig differenzierbar. Analog zum Beweis von Theorem 3.2 läßt sich unter Verwendung der Differenzierbarkeitseigenschaften von F durch vollständige Induktion zeigen, daß $\mathfrak{A}$ $\mathcal{C}^\infty$ ist auf $W_p^{2m,s}(\Omega)$. □

4. KATASTROPHENTHEORIE ELLIPTISCHER EULER-LAGRANGE-GLEICHUNGEN MIT DIRICHLET'SCHEN RANDBEDINGUNGEN

Zusammenfassung: In diesem Kapitel werden die Theoreme 2.2 und 2.3 unter Verwendung der im letzten Kapitel bewiesenen Differenzierbarkeitseigenschaften von Funktionalen und Operatoren in Sobolew-Räumen auf nichtlineare elliptische Euler-Lagrange-Gleichungen mit Dirichlet'schen Randbedingungen angewandt. In Kap. 4.1 werden die wichtigsten Eigenschaften linearer, selbstadjungierter, elliptischer Differentialoperatoren rekapituliert. In Kap. 4.2 betrachten wir Euler-Lagrange-Gleichungen, deren Funktional sich als $\mathcal{C}^\infty$-Funktional über einem geeigneten Hilbertraum formulieren läßt und wenden Theorem 2.2 an, um einen endlich dimensionalen singulären Anteil von dem Funktional abzuspalten. In Kap.4.3 wird das Bifurkationsverhalten von allgemeinen parameterabhängigen Euler-Lagrange-Gleichungen auf die Entfaltung einer Singularität zurückgeführt.

4.1 Elliptische, selbstadjungierte Systeme linearer partieller Differentialoperatoren mit Dirichlet'schen Randbedingungen

Ω sei eine beschränkte, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und der Differentialoperator L wirke auf Funktionen $u=(u_1,\dots,u_s)$, $u_j=u_j(x)$, $x\in\Omega$,

$$(Lu)_i(x) := \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \sum_{j=1}^{s} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \left(a_{\alpha\beta}^{ij}(x)\, \partial^\beta u_j(x)\right),\quad 1\leq i\leq s, \tag{4.1}$$

wobei die $a_{\alpha\beta}^{ij}(x)$ $(1\leq i,j\leq s)$ stetig und beschränkt seien auf Ω und α,β alle n-Multiindices mit $0\leq|\alpha|,|\beta|\leq m$ durchlaufe. L sei (i) formal selbstadjungiert, d.h. es gilt $a_{\alpha\beta}^{ij}(x)=a_{\beta\alpha}^{ji}(x)$ und (ii) stark elliptisch, d.h. es gibt ein $c_0>0$, so daß für alle $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_s)\in\mathbb{R}^s$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ und alle $x\in\Omega$ die Ungleichung

$$(\pm) \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \sum_{i,j=1}^{s} a_{\alpha\beta}^{ij}(x)\xi^\alpha\xi^\beta\eta_i\eta_j \geq c_0|\xi|^{2m}|\eta|^2 \tag{4.2}$$

erfüllt ist. Im Folgenden wird stets angenommen, daß in (4.2) das "+"-Zeichen gilt.

(1) Schwache Eigenfunktionen des Dirichlet-Problems ([32,33]):

Setze $H:=\mathring{W}_2^{m,s}(\Omega)$, $H_0:=(L_2(\Omega))^s$ und $(.,.):=(.,.)_{H_0}$, $\|\cdot\|:=\|\cdot\|_{H_0}$. Die stetige und symmetrische Bilinearform $B:H\times H\to\mathbb{R}$ sei definiert durch

$$B(u,v) := \sum_{i,j=1}^{s} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \int_\Omega a_{\alpha\beta}^{ij}(x)\partial^\alpha u_i(x)\partial^\beta v_j(x)dx = B(v,u). \tag{4.3}$$

Aus (4.3) folgt [32] die Garding'sche Ungleichung,

$$B(u,u) \geq c_1\|u\|_H^2 - \varkappa_0\|u\|^2 \tag{4.4}$$

mit einer positiven Konstanten c_1 und einer nichtnegativen Konstanten $\varkappa_0$. Setzt man daher

$$B_0(u,v) := B(u,v) + \varkappa_0(u,v),\ u,v\in H, \tag{4.5}$$

so folgt aus der Garding'schen Ungleichung (4.4), daß die durch $\|u\|_m := \sqrt{B_0(u,u)}$, $u\in H$, induzierte Norm auf H äquivalent ist zu $\|\cdot\|_{W_2^{m,s}(\Omega)}$. Wegen der Symmetrie von B_0 kann auf dem in $W_2^{m,s}(\Omega)$ abgeschlossenen Teilraum H auch das Skalarprodukt B_0 verwendet werden, da die durch $(.,.)_{W_2^{m,s}(\Omega)}$ und B_0 induzierten Topologien äquivalent sind auf H. Bezeichnet daher $H^* := \overset{\circ}{W}{}_2^{-m,s}(\Omega)$ den topologischen Dualraum von H ([27,33]), so folgt nach dem Riesz'schen Darstellungssatz, daß zu gegebenem $f\in H^*$ ein eindeutiges $v_f\in H$ mit $\|v_f\|_m = \|f\|_{H^*}$ existiert, so daß $(u,f)_{H\times H^*} = B_0(u,v_f)$ gilt für alle $u\in H$. $\tilde{G}_0$ bezeichne den isometrischen Isomorphismus $\tilde{G}_0 : H^* \longrightarrow H$, $\tilde{G}_0 f := v_f$, und $\tilde{L}_0$ sei die zu $\tilde{G}_0$ inverse Abbildung. H_0 ist dicht in H^* und die Einbettung $H_0 \subset H^*$ ist stetig (vgl. [33], jedes $f\in H_0$ kann vermöge $u\to(u,f)$, $u\in H$, als lineares, stetiges Funktional auf H aufgefaßt werden). $\bar{G}_0$ bezeichne die Einschränkung von $\tilde{G}_0$ auf H_0 und $\hat{G}_0 : H_0 \longrightarrow H_0$ den Operator $\hat{G}_0 := \bar{G}_0 E$, wobei E der Einbettungsoperator $H \subseteq H_0$ sei. Nach dem Theorem von Rellich (Kap. 3.1) ist $\hat{G}_0$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator auf H_0. Da außerdem $(G_0 f,f) > 0$ für alle $f\in H_0$, $f\neq 0$, gilt, folgt aus der Theorie kompakter, sebstadjungierter Operatoren in Hilberträumen [30] die Existenz einer abzählbaren Sequenz von (reellen) Eigenwerten $\bar{\varkappa}_1 \geq \bar{\varkappa}_2 \geq \ldots > 0$ mit $\bar{\varkappa}_j \to 0$ $(j\to\infty)$, und Eigenfunktionen $v_j = (v_{j1},\ldots,v_{js}) \in H$, die orthonormal bzgl. (.,.) angenommen werden können. (Die Eigenwerte seien entsprechend ihrer jeweils endlichen Vielfachheit gezählt.) Die Gesamtheit aller Eigenfunktionen bildet eine Orthonormalbasis in H_0 und aus der Tatsache, daß H_0 dicht in H^* und H^* isomorph zu H ist, folgt, daß die Eigenfunktionen vollständig in H sind. Setze $\bar{\varkappa}_i := 1/\bar{\varkappa}_i$, $i\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$$B_0(u,v_i) = (u,\tilde{L}_0 v_i) = \bar{\varkappa}_i (u,v_i),\ u\in H, \tag{4.6}$$

bzw. $B_0(v_i,v_j) = \bar{\varkappa}_i \delta_{ij}$. Die Gesamtheit aller $w_i := v_i/\sqrt{\bar{\varkappa}_i}$ $(i\in\mathbb{N})$ bildet somit eine Orthonormalbasis von H bzgl. B_0. Für die Bilinearform B ergibt sich

$$B(u,w_i) = \varkappa_i (u,w_i) = \varkappa_i B_0(u,w_i)/\bar{\varkappa}_i, \tag{4.7}$$

wobei $\varkappa_i := \bar{\varkappa}_i - \varkappa_0$. Bezeichnet daher $A : H \longrightarrow H$ den durch $B(u,v) = B_0(Au,v)$ definierten stetigen, selbstadjungierten linearen Operator auf H, so folgt, daß die w_i Eigenfunktionen von A sind mit Eigenwerten $\varkappa_i/\bar{\varkappa}_i$. Wegen der Garding'schen Ungleichung (4.4) ist A ein Fredholmoperator und wegen der Symmetrie von B ist der Index von A Null. Der Kern von A wird von den höchstens endlich vielen orthonormalen Eigenfunktionen aufgespannt, die zu den Eigenwerten $\varkappa_j = 0$ korrespondieren. Die $\varkappa_i$ und v_i werden als Eigenwerte und (schwache) Eigenfunktionen des Differentialoperators L mit Dirichlet'schen Randbedingungen interpretiert.

(2) Starke Eigenfunktionen des Dirichlet-Problems ([34-36]):

Vorgelegt sei wieder der Differentialoperator (4.1), wobei jetzt vorausgesetzt wird, daß $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ der Kegelbedingung genügt. Außerdem seien die $a_{\alpha\beta}^{ij}(x)$ aus $C_{|\alpha|}(\Omega)$ für $1 \leq i,j \leq s$, $0 \leq |\alpha|,|\beta| \leq m$. Bezeichne mit B_p^{2m} den abgeschlossenen Teilraum

$W_p^{2m,s}(\Omega) \cap \mathring{W}_p^{m,s}(\Omega)$ von $W_p^{2m,s}(\Omega)$, und setze $B_p := (L_p(\Omega))^s$, $p \in]1,\infty[$. B_p^{2m} ist der Abschluß von $(C_{2m}(\Omega))^s \cap (\mathring{C}_m(\Omega))^s$ in $W_p^{2m,s}(\Omega)$. Der lineare Operator $L_{(p)}: B_p^{2m} \to B_p$, wird durch $L_{(p)}u := Lu$, $u \in B_p^{2m}$, definiert. Nach den Abschätzungen von Agmon, Douglis, Nirenberg [34] und Browder [36] ist $L_{(p)}$ stetig und es gilt die a priori-Abschätzung:

$$\|u\|_{B_p^{2m}} \leq C(\|L_{(p)}u\|_{B_p} + \|u\|_{B_p}), \quad u \in B_p^{2m}, \tag{4.8}$$

mit einer von Ω, s, p, m abhängigen Konstanten C. Die Ungleichung (4.8) impliziert bereits, daß das Bild von $L_{(p)}$ abgeschlossen in B_p ist. Ist $-r \in \mathbb{R}$ kein Eigenwert von L, so ist der Operator $L_{(p),r}: B_p^{2m} \to B_p$, $L_{(p),r}u := L_{(p)}u + ru$ $(u \in B_p^{2m})$ ein Isomorphismus von B_p^{2m} nach B_p. Bezeichnet daher $G_{(p),r}$ den zu $L_{(p),r}$ inversen Operator, dann folgt wie in (1) aus der Kompaktheit der Einbettung von B_p^{2m} in B_p die Existenz von Eigenwerten und Eigenfunktionen. Die (schwachen) Eigenfunktionen $v_i \in H$ von (1) sind somit aus B_p^{2m} für jedes $p \in [1,\infty[$ und die Eigenwerte $\varkappa_i$ $(i \in \mathbb{N})$ sind identisch mit den Eigenwerten von $L_{(p)}$, aufgefaßt als dicht definierter Operator in B_p. Außerdem sind die Eigenfunktionen vollständig in B_p^{2m} und B_p für jedes $p \in]1,\infty[$ [35]. Da sowohl der Kern als auch der Cokern von $L_{(p)}$ von den endlich vielen, zum Eigenwert Null korrespondierenden Eigenfunktionen aufgespannt wird, ist $L_{(p)}$ ein Fredholmoperator mit Index Null.

4.2 Aufspaltung spezieller Funktionale in einen quadratischen und einen endlich dimensionalen singulären Anteil

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt, offen und genüge der Kegelbedingung, und U sei eine offene Nullumgebung in $\mathbb{R}^k$. Die Funktion $R: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{sM(m,n)} \times U \to \mathbb{R}$ genüge folgenden Bedingungen:

(1) R ist beliebig oft differenzierbar bzgl. $\lambda \in U$ und alle partiellen Ableitungen bzgl. λ gehören für festes $\lambda \in U$ zur Klasse $\mathcal{H}(\Omega, s, m)$.

(2) Alle gemischten Ableitungen bzgl. $\lambda \in U$, $X \in \mathbb{R}^{sM(m,n)}$ von beliebiger Ordnung sind stetig auf $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{sM(m,n)} \times U$.

Nach Theorem 3.2 ist dann das Funktional

$$\mathfrak{A}: H \times U \to \mathbb{R}, \quad \mathfrak{A}(u,\lambda) := \int_\Omega R(x, \partial^{[m]}u(x), \lambda)\,dx \tag{4.9}$$

$\mathcal{C}^\infty$ auf $H \times U$. Für die ersten beiden partiellen Ableitungen von $\mathfrak{A}$ bzgl. H erhält man:

$$D_H\mathfrak{A}(u,\lambda)v = \sum_{i=1}^{s} \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega R_\alpha^i(x, \partial^{[m]}u(x), \lambda)\, \partial^\alpha v_i(x)\,dx \tag{4.10}$$

$$D_H^2\mathfrak{A}(u,\lambda)vw = \sum_{i,j=1}^{s} \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \int_\Omega R_{\alpha\beta}^{ij}(x, \partial^{[m]}u(x), \lambda)\partial^\alpha v_i(x)\partial^\beta w_j(x)\,dx, \tag{4.11}$$

wobei $u,v,w \in H$ und $R_\alpha^i := \partial R/\partial \xi_\alpha^i$, $R_{\alpha\beta}^{ij} := \partial^2 R/\partial \xi_\alpha^i \partial \xi_\beta^j$. Es wird angenommen, daß

$\mathfrak{R}(0,0)=0$, $D_H\mathfrak{R}(0,0)=0$, und daß die $a^{ij}_{\alpha\beta}(x):=R^{ij}_{\alpha\beta}(x,0,0)$ für $|\alpha|=|\beta|=m$ der Ungleichung (4.2) mit dem positiven Vorzeichen genügen. Die Bilinearform $B:H\times H\to\mathbb{R}$, $B:=D^2_H\mathfrak{R}(0,0)$ erfüllt dann die Ungleichung (4.4) und es gibt eine nichtnegative Konstante $\varkappa_0$, so daß die Bilinearform $B_0:=B+\varkappa_0(.,.)$ ein auf H zu $(.,.)_{W_2^{m,s}(\Omega)}$ äquivalentes Skalarprodukt bildet. Der lineare, stetige und selbstadjungierte Operator $A:H\to H$, definiert durch $B(u,v)=B_0(Au,v)$, $u,v\in H$, ist Fredholmoperator mit Index Null, die Voraussetzungen für Theorem 2.2 sind somit erfüllt. Wir bezeichnen wieder mit $\varkappa_i$ $(i\in\mathbb{N})$ die Eigenwerte des Differentialoperators L nach (4.1) $(a^{ij}_{\alpha\beta}(x):=R^{ij}_{\alpha\beta}(x,0,0))$ und mit $v_i\in H$ $(i\in\mathbb{N})$ die zu $\varkappa_i$ assoziierten und bzgl. $(.,.)$ orthonormalen Eigenfunktionen von L. H_0 ist als separabler, reeller Hilbertraum isometrisch isomorph zu l_2, dem Hilbertraum aller reellen, quadratsummablen Folgen. Jedes $u\in H_0$ kann daher mit den Komponenten $(u_1,u_2,\ldots)$ von u bzgl. der Orthonormalbasis $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von H_0 identifiziert werden, d.h. $u_i:=(u,v_i)\in\mathbb{R}$, $i\in\mathbb{N}$. Definiert man den in l_2 dichten Hilbertraum $\hat{l}_2$ durch die Menge aller Folgen $(u_1,u_2,\ldots)\in l_2$, für die $\sum_{i=1}^{\infty}u_i^2\bar{\varkappa}_i<\infty$, $\bar{\varkappa}_i:=\varkappa_i+\varkappa_0>0$, mit dem Skalarprodukt

$$(u,u')_{\hat{l}_2}:=\sum_{i=1}^{\infty}u_iu_i'\bar{\varkappa}_i,\quad u:=(u_1,u_2,\ldots),\ u':=(u_1',u_2',\ldots)\in\hat{l}_2,$$

so ist H mit dem Skalarprodukt B_0 nach (4.6) isometrisch isomorph zu $\hat{l}_2$ vermöge $H\ni u\to(u_1,u_2,\ldots)\in\hat{l}_2$, $u_i:=(u,v_i)$. Es kann demnach auch jedes $u\in H$ mit seinen Komponenten $(u_1,u_2,\ldots)$ bzgl. der Orthonormalbasis $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von H_0 identifiziert werden. Wir nehmen an, daß Null ein M-fach entarteter Eigenwert von L ist $(M\in\mathbb{N})$, d.h. $\varkappa_i=0$ für $1\leqslant i\leqslant M$. Da in (4.2) das positive Vorzeichen vorausgesetzt wurde, sind höchstens endlich viele Eigenwerte negativ, es sei daher $\varkappa_j<0$ für $M+1\leqslant j\leqslant M_1$, $M_1\geqslant M$. Alle übrigen Eigenwerte sind positiv, $\varkappa_j>0$ für $j\geqslant M_1+1$. Für $u\in H$ setze

$y:=(y_1,\ldots,y_M)$, $y_j:=u_j:=(u,v_j)$ $(1\leqslant j\leqslant M)$; $z:=(u_{M+1},u_{M+2},\ldots)$, $u_j:=(u,v_j)$, $j\geqslant M+1$. Nach Theorem 2.2 gibt es um $0\in\hat{l}_2\times\mathbb{R}^k$ einen lokalen Diffeomorphismus $\Psi(y,z,\lambda)=(y,\Psi_1(y,z,\lambda),\lambda)$ und lokal um $0\in\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^k$ eine Funktion $h(y,\lambda)=(h_{M+1}(y,\lambda),h_{M+2}(y,\lambda),\ldots)\in\hat{l}_2$, deren Skalarprodukt $(h(y,\lambda),h(y,\lambda))_{\hat{l}_2}=\sum_{j=M+1}^{\infty}\bar{\varkappa}_j(h_j(y,\lambda))^2$ beliebig oft stetig differenzierbar ist (die Komponenten $h_j(y,\lambda)$ sind demnach ebenfalls $\mathcal{C}^\infty$), so daß gilt:

$$\mathfrak{R}\circ\Psi^{-1}\circ\Psi(y,z,\lambda)=\sum_{j=M_1+1}^{\infty}\bar{\varkappa}_ju_j^2-\sum_{j=M+1}^{M_1}\bar{\varkappa}_ju_j^2+g(y,\lambda),\tag{4.12}$$

wobei Ψ der isometrische Isomorphismus von H nach $\hat{l}_2$ ist, der jedem $u\in H$ seine Komponenten bzgl. der Orthonrmalbasis $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von H_0 zuordnet und die $\mathcal{C}^\infty$-Funktion g mit $h(x;y,\lambda):=\sum_{j=M+1}^{\infty}h_j(y,\lambda)v_j(x)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}g(y,\lambda)&=\mathfrak{R}\Big(\sum_{j=1}^{M}y_jv_j+\sum_{j=M+1}^{\infty}h_j(y,\lambda)v_j,\lambda\Big)\\&=\int_\Omega R\Big(x,\sum_{j=1}^{M}y_j\partial^{[m]}v_j(x)+\partial^{[m]}h(x;y,\lambda),\lambda\Big)dx.\end{aligned}\tag{4.13}$$

g ist vollständig entartet,

$$g(0,0) = \partial g(0,0)/\partial y_i = \partial^2 g(0,0)/\partial y_i \partial y_j = 0 \quad (1 \leqslant i,j \leqslant M) \tag{4.14}$$

und die h_j sind eindeutig bestimmt durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 = F_l(y,h,\lambda) &:= D_H \mathfrak{A}(\sum_{j=1}^{M} y_j v_j + \sum_{j=M+1}^{\infty} h_j v_j, \lambda) v_l \\ &= \sum_{i=1}^{s} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega R_\alpha^i(x, \sum_{j=1}^{M} y_j \partial^{[m]} v_j(x) + \sum_{j=M+1}^{\infty} h_j \partial^{[m]} v_j(x), \lambda) \partial^\alpha v_{li}(x) dx \end{aligned} \tag{4.15}$$

$(l=M+1,M+2,\ldots)$. Wir betrachten jetzt die zu dem Funktional (4.9) assoziierte Euler-Lagrange-Gleichung,

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha R_\alpha^i(x, \partial^{[m]} u(x), \lambda) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \tag{4.16}$$

und nennen $u_\lambda \in H$ zu gegebenem $\lambda \in U$ eine schwache Lösung von (4.16) mit Dirichlet'schen Randbedingungen, wenn $D_H \mathfrak{A}(u_\lambda,\lambda)v=0$ für alle $v \in H$. Diese Definition ist eine natürliche Verallgemeinerung des Begriffs der schwachen Lösung einer linearen, partiellen Differentialgleichung mit Dirichlet'schen Randbedingungen [19, 32]. Für (u,λ) nahe bei $(0,0) \in H \times \mathbb{R}^k$ sind mit (4.12) und (4.15) zu gegebenem λ alle schwachen Lösungen $u_\lambda = u_\lambda(x)$ eindeutig bestimmt aus den Lösungen $y_\lambda = (y_{1\lambda}, \ldots, y_{M\lambda})$ des Gleichungssystems $\partial g(y,\lambda)/\partial y_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant M)$ vermöge

$$u_\lambda(x) = \sum_{j=1}^{M} y_{j\lambda} v_j(x) + h(x; y_\lambda, \lambda). \tag{4.17}$$

4.3 Katastrophentheorie allgemeiner elliptischer Euler-Lagrange-Gleichungen mit Dirichlet'schen Randbedingungen

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt, offen, und genüge der Kegelbedingung. U sei eine offene Nullumgebung in $\mathbb{R}^k$ und die Funktion $R: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{sM(m,n)} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ genüge folgenden Bedingungen:

(1) Für jedes $(x,X) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{sM(m,n)}$ ist R beliebig oft differenzierbar bzgl. $\lambda \in U$ und alle Ableitungen bzgl. λ gehören für festes $\lambda \in U$ zur Klasse $\mathcal{P}(\Omega,s,m)$.

(2) Alle in (1) als existent vorausgesetzten Ableitungen sind stetig auf $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{sM(m,n)} \times U$.

$p \in [2,\infty[$ sei so gewählt, daß $n/p < 1$. Nach Theorem 3.4 ist dann das Funktional

$$\mathfrak{A}: B_p^{2m} \times U \to \mathbb{R}, \quad \mathfrak{A}(u,\lambda) := \int_\Omega R(x, \partial^{[m]} u(x), \lambda) dx \tag{4.18}$$

beliebig oft stetig differenzierbar auf $B_p^{2m} \times U$. Setze

$$R_\alpha^i(x,X,\lambda) := \partial R(x,X,\lambda)/\partial \xi_\alpha^i, \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m, \ 1 \leqslant i \leqslant s, \tag{4.19a}$$

$$R_{\alpha\beta}^{ij}(x,X,\lambda) := \partial^2 R(x,X,\lambda)/\partial \xi_\alpha^i \partial \xi_\beta^j, \quad 0 \leqslant |\alpha|,|\beta| \leqslant m, \ 1 \leqslant i,j \leqslant s, \tag{4.19b}$$

und definiere den Operator $\mathcal{F}: B_p^{2m} \times U \to B_p$ durch

$$(\mathcal{F}(u,\lambda))_i(x) := \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha R_\alpha^i(x, \partial^{[m]} u(x), \lambda), \quad 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{4.20}$$

$\mathcal{F}$ ist nach Theorem 3.3 beliebig oft stetig differenzierbar und mit dem Gauß'-schen Satz erhält man

$$D_{B_p^{2m}} \mathcal{R}(u,\lambda)v = (\mathcal{F}(u,\lambda),v), \quad u,v \in B_p^{2m}. \tag{4.21}$$

Für die Ableitung von $\mathcal{F}$ an der Stelle $u=0$, $\lambda=0$, ergibt sich

$$(L_{(p)}v)_i(x) := (D_{B_p^{2m}} \mathcal{F}(0,0)v)_i(x) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^{\alpha}(a_{\alpha\beta}^{ij}(x)\partial^{\beta}v_j(x)), \tag{4.22}$$

wobei $v \in B_p^{2m}$ und $a_{\alpha\beta}^{ij}(x) := R_{\alpha\beta}^{ij}(x,0,0)$. Wir nehmen an, daß $\mathcal{R}(0,0)=0$, $\mathcal{F}(0,0)=0$ und daß die $a_{\alpha\beta}^{ij}(x)$ der Ungleichung (4.2) mit dem positiven Vorzeichen genügen. Nach Kap. 4.1(2) gibt es zu $L_{(p)}$, aufgefaßt als dicht definierter Operator in B_p, eine abzählbare Sequenz von Eigenwerten $\varkappa_i$ ($i \in \mathbb{N}$) mit Eigenfunktionen $v_i \in B_p^{2m}$, wobei jeder Eigenwert endliche Multiplizität besitzt. Wie in Kap. 4.2 nehmen wir an, daß $\varkappa_1 = \ldots = \varkappa_M = 0$, $\varkappa_j < 0$ für $M+1 \leq j \leq M_1$ und $\varkappa_j > 0$ für $j \geq M_1+1$ ist. Der Kern von $L_{(p)}$ wird demnach von den v_i, $1 \leq i \leq M$, aufgespannt. Da die Gleichung $L_{(p)}v=f$ für $f \in B_p$ lösbar ist g.d.w. $(f,v_i)=0$ $(1 \leq i \leq M)$, und da $B_p \subseteq H_o \subseteq B_p^{*} = (L_q(\Omega))^s$ $(1/p+1/q=1)$ gilt, wird auch der Cokern von $L_{(p)}$ von den v_i $(1 \leq i \leq M)$ aufgespannt. Die Voraussetzungen für Theorem 2.3 sind somit erfüllt. Bezeichne mit P_1, bzw. P_2 die Projektion $u \to \sum_{i=1}^{M}(u,v_i)v_i$ in B_p^{2m}, bzw. B_p. Dann besteht $E_1 := (1-P_1)B_p^{2m}$, bzw. $E_2 := (1-P_2)B_p$ aus allen $u = \sum_{j=M+1}^{\infty}(u,v_j)v_j \in H_o$, für die die Summe in der Norm von B_p^{2m}, bzw. B_p konvergiert. Nach Theorem 2.3 gibt es eine auf einer Nullumgebung $V \subset \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^k$ definierte $\mathcal{C}^{\infty}$-Funktion $g(y,\lambda)$ $(y=(y_1,\ldots,y_M)$ mit

$$g(0,0) = \partial g(0,0)/\partial y_i = \partial^2 g(0,0)/\partial y_i \partial y_j = 0 \quad (1 \leq i,j \leq M), \tag{4.23}$$

sowie eine beliebig oft stetig differenzierbare Abbildung

$$h: V \to E_1, \quad h(y,\lambda) = h(x;y,\lambda) = \sum_{j=M+1}^{\infty} h_j(y,\lambda)v_j(x), \tag{4.24}$$

(Konvergenz der Summe in der Norm von B_p^{2m}), so daß lokal um $(0,0) \in B_p^{2m} \times \mathbb{R}^k$ zu gegebenem λ alle Lösungen $u_\lambda \in B_p^{2m}$ der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\mathcal{F}(u,\lambda) = 0 \tag{4.24}$$

(mit Dirichlet'schen Randbedingungen) eindeutig bestimmt sind aus den Lösungen $y_\lambda = (y_{1\lambda},\ldots,y_{M\lambda})$ des Gleichungssystems

$$\partial g(y,\lambda)/\partial y_i = 0, \quad 1 \leq i \leq M, \tag{4.26}$$

vermöge

$$u_\lambda = \sum_{i=1}^{M} y_{i\lambda}v_i + h(y_\lambda,\lambda). \tag{4.27}$$

Die Funktion g ist gegeben durch

$$\begin{aligned} g(y,\lambda) &= \mathcal{R}(\sum_{j=1}^{M} y_j v_j + h(y,\lambda),\lambda) \\ &= \int_\Omega R(x,\sum_{j=1}^{M} y_j \partial^{[m]}v_j(x) + \partial^{[m]}h(x;y,\lambda),\lambda)dx \end{aligned} \tag{4.28}$$

und die h_j ($j \geqslant M+1$) sind die eindeutigen Lösungen des Gleichungssystems

$$0=F_l(y,h,\lambda) := \left(\mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^{M} y_j v_j + \sum_{j=M+1}^{\infty} h_j v_j, \lambda\right), v_l\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{S} \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_{li}(x) \partial^{\alpha} R_{\alpha}^{i}\left(x, \sum_{j=1}^{M} y_j \partial^{[m]} v_j(x) + \sum_{j=M+1}^{\infty} h_j \partial^{[m]} v_j(x), \lambda\right) dx, \tag{4.29}$$

wobei $l=M+1,M+2,\ldots$. Da $h: V \to E_1$ beliebig oft stetig differenzierbar ist, sind alle Komponenten $h_j(y,\lambda)$ ebenfalls $\mathcal{C}^{\infty}$.

Falls R sowohl die Voraussetzungen von Kap. 4.2 als auch die von Kap. 4.3 erfüllt, sind die Funktionen g und h von Kap. 4.2 und Kap. 4.3 identisch. Dann sind alle schwachen Bifurkationslösungen u_λ nach (4.17) der zu R korrespondierenden Euler-Lagrange-Gleichung (4.16) bzw. (4.25) aus B_p^{2m} für jedes $p \in [1,\infty[$ und somit nach dem Sobolew-Lemma (2m-1)-mal stetig differenzierbar, wobei jedes $\partial^{\alpha} u_\lambda$ mit $|\alpha| = 2m-1$ verallgemeinerte Ableitungen in B_p besitzt. (Ladyzhenskaja [38] und Browder [37] haben Existenz- und Regularitätstheoreme für Lösungen von nichtlinearen elliptischen partiellen Differentialgleichungen vom Typ (4.25) mit (4.20) unter allgemeineren Voraussetzungen bewiesen.) Falls jedoch R nur die Voraussetzungen von Kap. 4.3, jedoch nicht die von Kap. 4.2 erfüllt, läßt sich das Funktional $\mathfrak{R}$ nicht mehr notwendig gemäß Gleich. (4.12) aufspalten, da $\mathfrak{R}$ nicht mehr als $\mathcal{C}^{\infty}$-Funktional über einem Hilbertraum interpretiert werden kann, dessen zweite Ableitung ein Fredholmoperator mit Index Null ist.

5. BIEGUNG VON STÄBEN

5.1 Formulierung des Randwertproblems

Wir betrachten einen gleichförmigen Stab der Länge l mit Elastizitätsmodul E und Trägheitsmoment I, der einer axialen Belastung P ausgesetzt wird und dessen Endpunkte in einem Scharnier gelagert sind. $W(S)$ $(0 \leq S \leq l)$ sei die Querverbiegung des belasteten Stabes und der unbelastete Stab besitze eine anfängliche Querverbiegung $W_0(S)$ (Imperfektion). Wir nehmen eine nichtlineare Kraft K_r pro Längeneinheit an, $K_r = k_1 W + k_3 W^3$, $k_1, k_3 > 0$. Die freie Energie E_f des Stabes ist [39] gegeben durch

$$E_f = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{ EI\left(\frac{d^2W}{dS^2}\right)^2 - P\frac{dW}{dS}\left(\frac{dW}{dS} + 2\frac{dW_0}{dS}\right) + k_1 W^2 + \frac{1}{2}k_3 W^4 \right\} dS. \tag{5.1a}$$

Nach Einführung dimensionsloser Größen s $(0 \leq s \leq \pi)$, $u(s)$, $u_0(s)$, $\lambda, \tau, \mu, \mathfrak{A}$, definiert durch

$$S = ls/\pi, \quad W = (k_1/k_3)^{1/2} u, \quad W_0 = \tau (k_1/k_3)^{1/2} u_0, \quad \lambda = \frac{P}{2EI}\left(\frac{l}{\pi}\right)^2,$$

$$\mu = (k_1/EI)(l/\pi)^4, \quad \mathfrak{A} = (k_3 E_f / k_1 EI)(l/\pi)^3,$$

erhält man aus (5.1a) für die dimensionslose freie Energie $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(u, \lambda, \tau, \mu)$,

$$\mathfrak{A} = \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2}(u'')^2 - \lambda u'(u' + 2\tau u_0') + \frac{1}{2}\mu u^2 (1 + \frac{1}{2}u^2) \right\} ds, \tag{5.1b}$$

wobei $u = u(s)$, $u_0 = u_0(s)$ und $' := d/ds$. Der "Imperfektionsparameter" [40] τ wird in einer Umgebung von $\tau = 0$ variiert und für $u_0(s)$ setzen wir eine harmonische Reihe an, $u_0(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (2/\pi)^{1/2} U_j \sin js$, mit dimensionslosen Größen $U_j \in \mathbb{R}$. Im Gleichgewicht verschwindet die erste Variation von $\mathfrak{A}$, was zu der Differentialgleichung (Euler-Lagrange-Gleichung)

$$u'''' + 2u''\lambda + \mu(u + u^3) = -2\lambda\tau u_0'' \tag{5.2a}$$

führt. Die Randbedingungen sind [39]:

$$u(0) = u(\pi) = 0, \quad u''(0) = u''(\pi) = 0. \tag{5.2b}$$

Bezeichne mit H die Vervollständigung aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, die die Randbedingungen (5.2b) erfüllen, in dem Sobolew'schen Hilbertraum $W_2^2(]0,\pi[)$. Nach Theorem 3.2 ist $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}^\infty$ auf $H \times \mathbb{R}^3$ und da $\mathfrak{A}$ bzgl. $u \in H$ ein Polynom vierten Grades ist, ist $\mathfrak{A}$ trivialerweise analytisch. Per definitionem [39,40] ist die kritische Belastung λ_c ("buckling load") der kleinste Wert von λ, für den ein Eigenwert des zu der zweiten Variation an der Stelle $\tau = 0, u = 0$ korrespondierenden Differentialoperators $L(\lambda, \mu)$ mit Randbedingungen (5.2b) verschwindet und alle von Null verschiedenen Eigenwerte positiv sind. Für $L(\lambda, \mu)$ erhält man

$$L(\lambda,\mu)v = v'''' + 2\lambda v'' + \mu v, \quad v \in H, \tag{5.3}$$

und die Eigenwerte $\gamma_k(\lambda, \mu)$ $(k \in \mathbb{N})$ von L sind gegeben durch

$$\gamma_k = \gamma_k(\lambda, \mu) = k^4 - 2\lambda k^2 + \mu, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5.4}$$

mit den in $H_o := L_2(]0,\pi[)$ orthonormalen und in H_o und H vollständigen Eigenfunktionen $v_k(s) = (2/\pi)^{1/2}\sin ks$ $(k \in \mathbb{N})$. Ein Eigenwert verschwindet, falls $\lambda = \lambda_n = \lambda_n(\mu) = (n^2 + \mu/n^2)/2$ $(n \in \mathbb{N})$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) Es sei $\mu \neq r^2(r+1)^2$ $(r \in \mathbb{N})$. Dann gibt es genau ein $m \in \mathbb{N}$, so daß

$$m^2(m+1)^2 > \mu > m^2(m-1)^2. \tag{5.5}$$

Für alle ganzen Zahlen $r > -n$ gilt

$$2(\lambda_{n+r} - \lambda_n) = (n+r)^{-2}\left[((n+r)/n)^2 - 1\right]\left[n^2(n+r)^2 - \mu\right], \tag{5.6}$$

$$\gamma_{n+r}(\lambda_n, \mu) = \left[((n+r)/n)^2 - 1\right]\left[n^2(n+r)^2 - \mu\right]. \tag{5.7}$$

Aus (5.6), bzw. (5.7) folgt mit (5.5), daß

$$\lambda_{m+r} - \lambda_m > 0 \text{ für } -(m-1) \leqslant r \leqslant -1 \text{ und } r \geqslant 1, \tag{5.8}$$

bzw.

$$\gamma_{m+r}(\lambda_m, \mu) > 0 \text{ für } -(m-1) \leqslant r \leqslant -1 \text{ und } r \geqslant 1. \tag{5.9}$$

λ_m mit m nach (5.5) ist somit die kritische Belastung, $\lambda_c = \lambda_m$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gibt es wenigstens einen Eigenwert γ_j mit $\gamma_j(\lambda_n, \mu) < 0$. Dies ist auch zu erwarten, da bei der kritischen Belastung ein Stabilitätsaustausch stattfindet: Die triviale Lösung u=0 von (5.2) für $\gamma = 0$ ist stabil für $\lambda < \lambda_c$ und instabil für $\lambda > \lambda_c$.

(2) Es sei $\mu = \mu_m := m^2(m+1)^2$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt, daß

$$\lambda_n(\mu_m) = \frac{1}{2}\left(n^2 + \frac{m^2}{n^2}(m+1)^2\right) \tag{5.10a}$$

$$\lambda_m(\mu_m) = \lambda_{m+1}(\mu_m) = \frac{1}{2}(m^2 + (m+1)^2) =: \lambda_m^o \tag{5.10b}$$

$$\gamma_n(\lambda_m^o, \mu_m) = n^4 - (m^2 + (m+1)^2)n^2 + m^2(m+1)^2 \tag{5.10c}$$

und somit $\gamma_m(\lambda_m^o, \mu_m) = \gamma_{m+1}(\lambda_m^o, \mu_m) = 0$. Für $\lambda = \lambda_m^o$ verschwinden somit zwei Eigenwerte. Wie bei Fall(1) läßt sich mit (5.6) und (5.7) zeigen, daß $\lambda_m^o < \lambda_n(\mu_m)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m, m+1$. Außerdem gibt es wenigstens ein $j \in \mathbb{N}$, so daß $\gamma_j(\lambda_n, \mu_m) < 0$, falls $n \neq m, m+1$. λ_m^o ist somit für $\mu = \mu_m$ die kritische Belastung, $\lambda_c = \lambda_m^o$, und es tritt in diesem Fall zweifache Entartung ein.

Der durch $D_H^2 \mathcal{R}(0, \lambda, \mu, 0)vw = (L(\lambda, \mu)v, w)_{H_o} = (A(\lambda, \mu)v, w)_H$ definierte Operator $A = A(\lambda, \mu): H \to H$ ist Fredholmoperator mit Index Null, es kann somit Theorem 2.2 verwendet werden. Für $\mu \neq r^2(r+1)^2$ $(r \in \mathbb{N})$ besitzt A an der Stelle $\lambda = \lambda_m(\mu)$ mit m nach (5.5) einen eindimensionalen Kern, aufgespannt von $v_m(s)$ (einfache Entartung). Falls $\mu = \mu_m$ $(m \in \mathbb{N})$ besitzt A an der Stelle $\lambda = \lambda_m^o$ einen zweidimensionalen Kern, der von $v_m(s)$, $v_{m+1}(s)$ aufgespannt wird (zweifache Entartung). In Kap. 5.2 wird das Bifurkationsverhalten bei einfacher und in Kap. 5.3 bei zweifacher Entartung diskutiert.

5.2 Einfache Entartung

Wir untersuchen das Bifurkationsverhalten des Randwertproblems (5.2) bei einfacher Entartung, d.h. wir betrachten ein festes $\mu>0$, das der Ungleichung (5.5) für ein $m \in \mathbb{N}$ genügt und variieren (λ,τ) in einer Umgebung von $\lambda=\lambda_m$, $\tau=0$. Nach dem Beweis von Theorem 2.2 ist zuerst das Gleichungssystem

$$F_l := D_H \mathfrak{N}(yv_m + \sum_{j=1,j\neq m}^{\infty} h_j v_j, \lambda, \tau, \mu)v_l = 0, \quad l \in \mathbb{N},\ l\neq m, \tag{5.11}$$

nach den h_j aufzulösen. Eine direkte Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} F_l = {} & \nu_l(\lambda,\mu)h_l - 2\lambda\tau l^2 U_l - (\mu/2\pi)\,\delta_{l,3m}y^3 + 3\mu y^2 \sum_{k=1;k\neq m}^{\infty} \alpha_{mmkl}h_k \\ & + 3\mu y \sum_{k,j=1;k,j\neq m}^{\infty} \alpha_{mkjl}h_k h_j + \mu \sum_{r,k,j=1;r,k,j\neq m}^{\infty} \alpha_{rjkl}h_r h_k h_j,\ m\neq l \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

wobei

$$\alpha_{rkjl} := \int_0^{\pi} v_r(s)v_k(s)v_j(s)v_l(s)ds, \quad r,k,j,l \in \mathbb{N}.$$

Da die Lösungen h_j $(j \in \mathbb{N},\ j\neq m)$ von (5.11) in einer Umgebung von $\lambda=\lambda_m(\mu)$, $\tau=0$ interessieren, setzen wir $\lambda=\lambda_m(\mu)+\sigma$ und entwickeln die Lösungen $h_j = h_j(y,\sigma,\tau)$ von (5.11) in eine Taylorreihe,

$$h_j(y,\sigma,\tau) = h^j_{0\tau}\tau + h^j_{0\sigma}\sigma + (h^j_{1\tau}\tau + h^j_{1\sigma}\sigma)y + h^j_2 y^2 + h^j_3 y^3 + \tilde{h}_j(y,\sigma,\tau), \tag{5.13}$$

wobei $\tilde{h}_j(y,\sigma,\tau)$ alle Terme höherer Ordnung enthält. Setzt man die Entwicklung (5.13) in das Gleichungssystem (5.11) ein, so ergibt sich mit (5.12) durch Koeffizientenvergleich, daß

$$h_j(y,\sigma,\tau) = \frac{2\lambda_m j^2 U_j}{\nu_j(\lambda_m,\mu)}\tau + \frac{\mu}{2\pi\lambda_{3m}(\lambda_m,\mu)}\delta_{j,3m}y^3 + \tilde{h}_j(y,\sigma,\tau). \tag{5.14}$$

Die Funktion

$$g(y,\sigma,\tau) := \mathfrak{N}(yv_m + \sum_{j=1;j\neq m}^{\infty} h_j(y,\sigma,\tau), \lambda_m+\sigma,\tau) \tag{5.15}$$

wird ebenfalls in eine Taylorreihe entwickelt,

$$\begin{aligned} g(y,\sigma,\tau) = {} & -\gamma_0\tau^2 + \beta_0\tau\sigma + \alpha_0\sigma^2 - \sum_{j=0}^{3}(g^j_\sigma\sigma + g^j_\tau\tau)y^j \\ & + cy^3 + d_0y^4 + ey^5 - d_2y^6 + \tilde{g}(y,\sigma,\tau), \end{aligned} \tag{5.16}$$

wobei $\tilde{g}$ alle übrigen Terme der Taylorentwicklung enthält. Einsetzen von (5.16) in (5.15) ergibt

$$\beta_0 = \alpha_0 = g^0_\sigma = g^0_\tau = g^1_\sigma = g^2_\tau = g^3_\sigma = c = e = 0 \tag{5.17a}$$

und

$$\gamma_0 = 2\lambda_m^2 \sum_{k=1;k\neq m}^{\infty} k^4 U_k^2 / \nu_k(\lambda_m,\mu), \quad g^1_\tau = 2m^2 U_m \lambda_m, \quad g^2_\sigma = m^2,$$

$$g^3_\tau = 9m^2\lambda_m U_{3m}/\pi\nu_{3m}(\lambda_m,\mu), \quad d_0 = 3\mu/8\pi, \quad d_2 = \mu/8\pi^2\nu_{3m}(\lambda_m,\mu), \tag{5.17b}$$

d.h. $$g(y,\sigma,\tau) = -\gamma_0\tau^2 - g^1_\tau\tau y - m^2\sigma y^2 - g^3_\tau\tau y^3 + d_0y^4 - d_2y^6 + \tilde{g}(y,\sigma,\tau). \tag{5.18}$$

γ_0 läßt sich mit der verallgemeinerten Greensfunktion [41]

$$G(s,t) = \sum_{k=1;k\neq m}^{\infty} v_k(s)v_k(t)/\gamma_k(\lambda_m,\mu)$$

des Differentialoperators $L(\lambda_m,\mu)$ aus der "Imperfektionsfunktion" $u_0(s)$ bestimmen:

$$\gamma_0 = 2\lambda_m^2 \int_0^\pi\int_0^\pi G(s,t)u_0''(s)u_0''(t)dsdt.$$

(1) Bifurkation für $\tau=0$:

Wir diskutieren zunächst das Bifurkationsverhalten von (5.2) für $\tau=0$. Im Anhang A wird gezeigt, daß sich g für $\tau=0$ schreiben läßt als

$$g(y,\varsigma,0) = -m^2\varsigma y^2 + d_0y^4 + \sum_{j=3}^{\infty}\hat{g}_j(\varsigma)y^{2j}, \quad \hat{g}_3(0) = -d_2. \tag{5.19}$$

Die Lösungen des Randwertproblems (5.2) sind für $\tau=0$ nach Theorem 2.2 eindeutig bestimmt aus den Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial y}g(y,\varsigma,0) = 2y\left\{-m^2\varsigma + y^2\left[2d_0 - 3d_2y^2(1-\tilde{g}_3(\varsigma)) + y^4\bar{g}(y^2,\varsigma)\right]\right\} = 0, \tag{5.20}$$

wobei $\tilde{g}_3(\varsigma) := \hat{g}_3(\varsigma) + d_2$, d.h. $\tilde{g}_3(0)=0$, und $\bar{g}(y^2,\varsigma) := \sum_{j=4}^{\infty} j\hat{g}_j(\varsigma)y^{2(j-4)}$.

Eine Lösung von (5.20) ist $y=0$. Wegen $h(0,\varsigma,0)=0$ (vgl. Anhang A) korrespondiert zu $y=0$ die triviale Lösung $u=0$ als Lösung von (5.2). Die übrigen Lösungen von (5.20) sind gegeben durch die Lösungen der Gleichung

$$m^2\varsigma = y^2(2d_0 - 3d_2y^2 + \ldots). \tag{5.21}$$

Da die rechte Seite von (5.21) nur von y^2 und ς abhängt, läßt sich (5.21) eindeutig nach $y^2=:z=z(\varsigma)$ auflösen. Durch eine Störungsrechnung erhält man

$$z(\varsigma) = (m^2\varsigma/2d_0)\left[1 + 3d_2\varsigma/2d_0 + \varsigma^2\alpha(\varsigma)\right]$$

mit einer analytischen Funktion $\alpha(\varsigma)$. Die Gleichung (5.21) besitzt somit genau zwei Lösungen $y = \underline{y}_{\pm}(\varsigma)$,

$$\underline{y}_{\pm}(\varsigma) = \pm(z(\varsigma))^{1/2} = \pm m(\varsigma/2d_0)^{1/2}\left[1+3d_2\varsigma/4d_0 + \varsigma^2\tilde{\alpha}(\varsigma)\right], \varsigma \geq 0, \tag{5.22}$$

mit einer analytischen Funktion $\tilde{\alpha}(\varsigma)$. Mit Gleich. (A.7) erhält man daraus die zu $\underline{y}_{\pm}(\varsigma)$ korrespondierenden Lösungen $u=u_{\pm}=\underline{u}_{\pm}(\varsigma;s)$ von (5.2) zu

$$\begin{aligned}\underline{u}_{\pm}(\varsigma;s) = \pm\Big\{&m(\varsigma/2d_0)^{1/2}\left[1 + 3d_2\varsigma/4d_0\right]v_m(s) \\ &+ (m\mu/2\pi\gamma_{3m}(\lambda_m,\mu))(\varsigma/2d_0)^{3/2}v_{3m}(s) + o(\varsigma^{3/2})\Big\}, \varsigma \geq 0\end{aligned} \tag{5.23}$$

Stabilität der Bifurkationslösungen: Ist $\bar{u}=\bar{u}(s)$ irgendeine Lösung von (5.2), so ist diese stabil, wenn die freie Energie $\mathcal{H}$ an der Stelle $u=\bar{u}$ ein lokales Minimum besitzt [39]. $L(\bar{u})$ sei der zu der zweiten Variation von $\mathcal{H}$ an der Stelle $u=\bar{u}$ assoziierte lineare Differentialoperator. Falls alle Eigenwerte von $L(\bar{u})$ positiv sind, ist $\bar{u}$ stabil, während $\bar{u}$ instabil ist, wenn ein Eigenwert von $L(\bar{u})$ negativ ist. Es sei nun $y_{(\varsigma,\tau)}$ eine Lösung der Gleichung $\partial g(y,\varsigma,\tau)/\partial y = 0$ und $\bar{u}=\bar{u}_{(\varsigma,\tau)}$ die zu $y_{(\varsigma,\tau)}$ assoziierte Lösung von (5.2). Nach Lemma 2.1 ist dann $\bar{u}_{(\varsigma,\tau)}$ stabil

(instabil), wenn $\partial^2 g(y,\varsigma,\tau)/\partial y^2|_{y=y_{(\varsigma,\tau)}} \gtrless 0$. Um zu entscheiden, ob die triviale Lösung u=0, bzw. die nichttrivialen Bifurkationslösungen $u=u_{\pm}$ stabil (instabil) sind, genügt es daher, die zweite Ableitung von g an der Stelle y=0, bzw. $y=y_{\pm}(\varsigma)$ zu analysieren. Man erhält:

$$\partial^2 g(y,\varsigma,0)/\partial y^2|_{y=0} = -2m^2\varsigma\,,$$

$$\partial^2 g(y,\varsigma,0)/\partial y^2|_{y=y_{\pm}(\varsigma)} = 4m^2\varsigma\,(1+o(\varsigma)),\ \varsigma \gtrless 0.$$

Die triviale Lösung ist daher stabil für $\varsigma < 0$ ($\lambda < \lambda_m$) und instabil für $\varsigma > 0$ ($\lambda > \lambda_m$), während die nichttrivialen Bifurkationslösungen nur für $\varsigma \gtrless 0$ ($\lambda \gtrless \lambda_m$) existieren und stabil sind. Die triviale Lösung wird instabil beim Übergang von $\lambda < \lambda_m$ nach $\lambda > \lambda_m$, dafür treten zwei nichttriviale stabile Lösungen für $\lambda \gtrless \lambda_m$ auf, die für $\lambda \longrightarrow \lambda_m$ ($\varsigma \to 0$) in die triviale Lösung übergehen. Der Stab beult sich demnach für $\lambda \leqslant \lambda_m$ nicht aus, während er für $\lambda > \lambda_m$ eine deformierte Gestalt mit m "Knoten" annimmt (Fig. 7). In Fig. 8 ist das Bifurkationsverhalten von (5.21) (bzw. (5.2) für $\tau=0$) graphisch dargestellt.

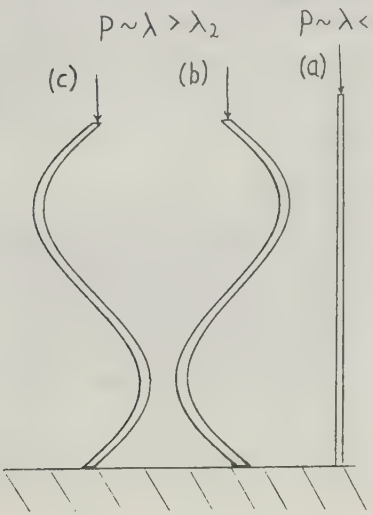


Fig. 7: Biegung des Stabes für $\tau=0$ und m=2. Für $\lambda < \lambda_m$ gibt es keine Querverbiegung (Fig. 7a). Für $\lambda > \lambda_m$ ist der undeformierte Zustand instabil, der Stab geht in den deformierten Zustand (b) oder (c) über (vgl. Gleich. (5.23)).

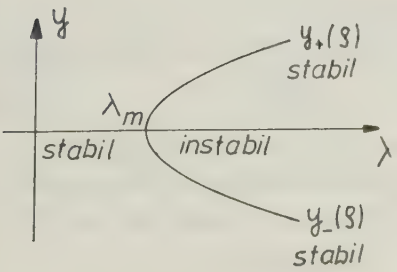


Fig. 8: Bifurkationsverhalten von Gl. (5.2) bzw. (5.21) in der y-λ-Ebene für $\tau=0$. Die triviale Lösung y=0 (bzw. u(s)=0) ist stabil für $\lambda < \lambda_m$ und instabil für $\lambda > \lambda_m$. Die zu $y_{\pm}(\varsigma)$ assoziierten Lösungen $u_{\pm}(\varsigma;s)$ sind stabil.

(2) Bifurkation für $\tau \neq 0$:

Für $\tau \neq 0$ lassen sich die Lösungen der Gleichung

$$\partial g(y,\sigma,\tau)/\partial y = 0 \tag{5.24}$$

nicht mehr geschlossen angeben. Da jedoch $g_0(y) := g(y,0,0) = d_0 y^4 + o(y^4)$ und $d_0 > 0$, gibt es nach Kap. 1 und Kap. 2 analytische Funktionen $a=a(\sigma,\tau)$, $b=b(\sigma,\tau)$, $X = X(y,\sigma,\tau)$, $g'(\sigma,\tau)$ mit $a(0,0)=b(0,0)=g'(0,0)=X(0,0,0)=0$ und $\partial X/\partial y \neq 0$, so daß

$$g(y,\sigma,\tau) = g'(\sigma,\tau) - aX - bX^2/2 + X^4/4. \tag{5.25}$$

Durch eine Störungsrechnung erhält man für die Taylorentwicklungen von a,b,X,g':

$$\begin{aligned} X(y,\sigma,\tau) &= -F_\tau \tau + X_1 y - X_3 y^3 + \ldots\ldots , \\ a(\sigma,\tau) &= a_\tau \tau + \ldots\ldots , \quad b(\sigma,\tau) = b_\sigma \sigma + \ldots\ldots , \\ g'(\sigma,\tau) &= -(g'_0 + \gamma_0)\tau^2 + \ldots\ldots , \end{aligned} \tag{5.26}$$

wobei X bis zur linearen Ordnung in (σ,τ) und bis zur dritten Potenz in y bestimmt wurde, während a,b nur bis zur ersten und g' bis zur zweiten Ordnung berechnet wurden. Die Konstanten in (5.26) sind gegeben durch

$$\begin{aligned} a_\tau &= 2(2\pi/3\mu)^{1/4} m^2 U_m \lambda_m , \quad b_\sigma = (2\pi/3\mu)^{1/2} m^2 , \\ X_1 &= (3\mu/2\pi)^{1/4} , \quad X_3 = \mu(3\mu/2\pi)^{3/4}/4\pi^2 \gamma_{3m}(\lambda_m,\mu) \\ g'_0 &= 4m^2\lambda_m^2 U_m(8U_m+27U_{3m})/9\mu\gamma_{3m}(\lambda_m,\mu) \\ F_\tau &= (3\mu/2\pi)^{3/4} m^2 \lambda_m (U_m+27U_{3m})/3\pi\gamma_{3m}(\lambda_m,\mu) \end{aligned} \tag{5.27}$$

Falls $U_m \neq 0$, ist die Abbildung $(y,\sigma,\tau) \longrightarrow (X,a,b)$ ein Diffeomorphismus, g ist in diesem Fall eine verselle Entfaltung von g_0. Hingegen ist die Abbildung $(\sigma,\tau) \longrightarrow (a,b)$ für $U_m = 0$ kein Diffeomorphismus, g ist dann auch keine verselle Entfaltung von g_0. Wir nehmen daher an, daß $U_m \neq 0$. Die durch (5.24) bestimmte Zustandsfläche im y-σ-τ-Raum und die Bifurkationsmenge Σ_g gehen dann diffeomorph aus Zustandsfläche und Bifurkationsmenge der cusp-Katastrophe $f(X,a,b) = -aX - bX^2/2 + X^4/4$ hervor. Die Zustandsfläche der cusp-Katastrophe ist in Fig. 5b (Kap. 2.3) dargestellt und die Bifurkationsmenge Σ_f erhält man durch Elimination von X aus den Gleichungen $\partial f/\partial X = \partial^2 f/\partial X^2 = 0$, d.h. durch

$$27a^2 - 4b^3 = 0, \quad \text{bzw.} \quad b = 3a^{2/3}/4^{1/3}. \tag{5.28}$$

Mit (5.26)-(5.28) erhält man für die Bifurkationsmenge Σ_g in den Variablen σ,τ:

$$\sigma = (\mu/m^2)^{1/3}(9U_m\lambda_m\tau/4\pi\mu)^{2/3} + o(\tau^{2/3}). \tag{5.29}$$

Die Kurve (5.29) ist in Fig. 9 abgebildet. Innerhalb der "cusp-Linien" existieren zwei Minima und ein Maximum von g, wozu zwei stabile und eine instabile Lösung von (5.2) korrespondieren. Außerhalb der cusp-Linien besitzt g nur ein Minimum, d.h. es gibt dort eine Lösung von (5.2) und diese ist stabil.

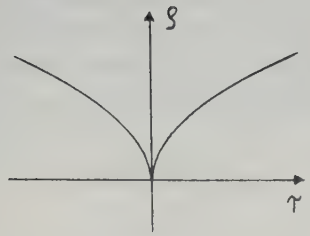


Fig. 9:
Bifurkationsmenge
von g, Gl. (5.29),
(cusp).

(3) Das Stabproblem via Keener:

Keener [23] untersuchte ebenfalls die Biegung von Stäben, nahm aber eine rücktreibende Kraft der Form $K_r=k_1W-k_3W^3$, $k_1,k_3>0$ an. Diese ist jedoch physikalisch unrealistisch: Für $0<|W|<\sqrt{k_1/3k_3}$ nimmt die rücktreibende Kraft mit wachsendem W zu, jedoch nimmt sie für $\sqrt{k_1/3k_3}<|W|<\sqrt{k_1/k_3}$ mit wachsendem W ab und verschwindet für $|W|=\sqrt{k_1/k_3}$. Falls $|W|>\sqrt{k_1/k_3}$ wirkt die rücktreibende Kraft nicht mehr der Auslenkung entgegen, sondern in Richtung der Auslenkung, d.h. der Stab würde sich von selbst weiter ausbeulen, was vom physikalischen Standpunkt aus unrealistisch ist (Fig. 10). Keener ging außerdem von einer festen Länge $l=(EI/k_1)^{1/4}\pi$ aus. Die zweifache Entartung (Kap. 5.3) ist daher bei seinem Modell nicht möglich. In dimensionslosen Koordinaten erhält man für die freie Energie nach dem Ansatz von Keener:

$$\Phi = \int_0^{\pi} \{\tfrac{1}{2}(u'')^2 - \lambda u'(u'+2\tau u_0') + \tfrac{1}{2}u^2(1-\tfrac{1}{2}u^2)\}ds$$

und aus dem Randwertproblem (5.2) wird

$$u'''' + 2\lambda u'' + u - u^3 = -2\lambda\tau u_0'' , \quad u(0)=u(\pi)=u''(0)=u''(\pi)=0, \tag{5.30}$$

d.h. es gilt $\mu=1$ und für die kritische Belastung λ_c erhält man $\lambda_c=\lambda_1(1)=1$. Das Bifurkationsverhalten von (5.30) wurde ebenfalls mit den Methoden von Kap. 2 untersucht. Für die Funktion g ergibt sich

$$g(y,\varrho,\tau) = -\gamma_0\tau^2 - g_\tau^1\tau y - \varrho y^2 + g_\tau^3\tau y^3 - d_0y^4 - d_2y^6 + \ldots . \tag{5.31}$$

wobei die Konstanten in (5.31) durch (5.17b) mit $\mu=1$, $m=1$ gegeben sind. Für $\tau=0$ erhält man das Bifurkationsdiagramm von Fig. 11, jedoch gilt hier

$$\partial^2 g(y,\varrho,0)/\partial y^2\big|_{y=y_\pm(\varrho)} < 0, \quad \partial^2 g(y,\varrho,0)/\partial y^2\big|_{y=0} \gtrless 0$$

für $\varrho \lessgtr 0$. Für $\lambda \leqslant 1$ existieren also zu (5.30) die triviale Lösung $u=0$ und zwei nichttriviale Lösungen $u_\pm(\varrho;s)$, wobei erstere stabil und die beiden anderen instabil sind. Für $\lambda > 1$ gibt es nur die triviale Lösung, die aber instabil ist. Das Bifurkationsverhalten von (5.30) für $\tau=0$ ist daher physikalisch nicht einsichtig, was auf die "rücktreibende" Kraft $K_r=k_1W-k_3W^3$ zurückzuführen ist. Für die Bifurkationsmenge von g nach Gleich. (5.31) erhält man

$$\varrho = -(9U_1\tau/4\sqrt{\pi})^{2/3} + o(\tau^{2/3}), \tag{5.32}$$

in Übereinstimmung mit Keener [23] (Fig. 12). Innerhalb der cusp-Linien existieren eine stabile und zwei instabile Lösungen von (5.30), während außerhalb nur eine instabile Lösung existiert, d.h. das Bifurkationsverhalten von (5.30) ist auch für $\gamma \neq 0$ physikalisch unrealistisch, während die mit unserem Ansatz (5.1) und (5.2) erzielten Ergebnisse durchaus plausibel erscheinen.

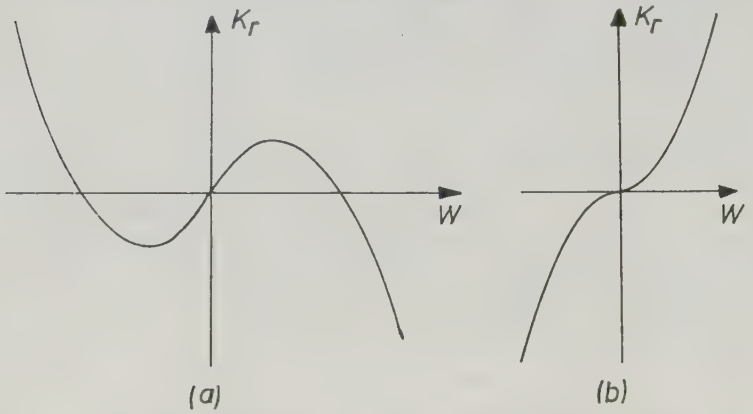


Fig. 10: (a) Rücktreibende Kraft $K_r = k_1 W - k_3 W^3$ nach Keener. Die Nullstellen von K_r sind bei $W = \pm\sqrt{k_1/k_3}$ und die Extrema bei $W = \pm\sqrt{k_1/3k_3}$. Für $|W| > \sqrt{k_1/k_3}$ würde die rücktreibende Kraft in Richtung der Auslenkung wirken. (b) Rücktreibende Kraft $K_r = k_1 W + k_3 W^3$. Für jedes $W \neq 0$ wirkt K_r der Auslenkung entgegen.

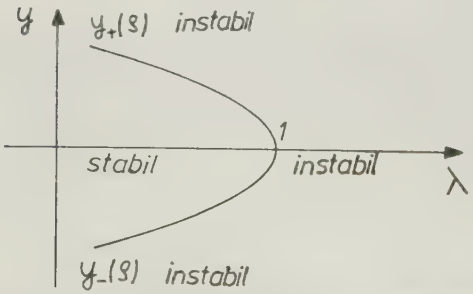


Fig. 11: Bifurkationsdiagramm der Gleichung $\partial g(y,\varsigma,0)/\partial y = 0$ mit g nach Gl. (5.31). Außer der trivialen Lösung y=0 gibt es zwei nichttriviale Lösungszweige $y = y_\pm(\varsigma) = \pm(-\varsigma/2d_0)^{1/2}(1 + \ldots.), \varsigma \leq 0$, die zu instabilen Lösungen von Gleich. (5.30) korrespondieren.

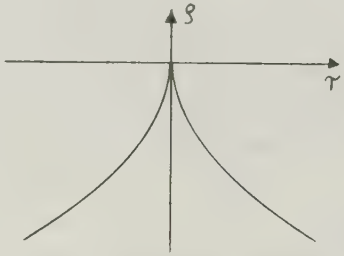


Fig. 12: Bifurkationsmenge von g nach Gl. (5.31) (cusp).

5.3 Zweifache Entartung

Wir untersuchen nun das Bifurkationsverhalten von Gleich. (5.2) bei zweifacher Entartung, d.h. wir variieren (ς,x,τ) um $(0,0,0)$, wobei $x := \mu - \mu_m$, $\varsigma := \lambda - \lambda_m^0$, $m \in \mathbb{N}$. Das zu lösende Gleichungssystem (2.10b) $((y_1,y_2) =: (x,y))$ wird in diesem Fall zu

$$F_l := D_H \mathcal{R}(xv_m + yv_{m+1} + \sum_{j=1;j\neq m,m+1}^{\infty} h_j v_j, \lambda_m^0 + \varsigma, \tau, \mu_m + x) v_l = 0, \quad (5.33a)$$

wobei $l \in \mathbb{N}$, $l \neq m,m+1$. Eine direkte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} F_l = {} & \left[\gamma_l(\lambda_m^0, \mu_m) - 2l^2\varsigma + x\right] h_l - ((\mu_m + x)/2\pi)(\delta_{l,3m} x^3 + \delta_{l,3m+3} y^3) \\ & + \frac{3}{2\pi}(\mu_m + x)(\delta_{l,m+2} - \delta_{l,3m+2}) xy^2 + \frac{3}{2\pi}(\mu_m + x) x^2 y \cdot \begin{cases} (\delta_{l,m-1} - \delta_{l,3m+1}), & m \geq 2 \\ (-\delta_{l4}), & m = 1 \end{cases} \\ & + 3(\mu_m + x)\Big\{ x^2 \sum_{k=1;k\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{mmkl} h_k + y^2 \sum_{k=1;k\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{m+1,m+1,kl} h_k \\ & + 2xy \sum_{k=1;k\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{m,m+1,kl} h_k + x \sum_{k,j=1;k,j\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{mkjl} h_k h_j \\ & + y \sum_{k,j=1;k,j\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{m+1,kjl} h_k h_j + \frac{1}{3} \sum_{r,k,j=1;r,k,j\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{rkjl} h_r h_k h_j \Big\} . \end{aligned} \quad (5.33b)$$

Wir entwickeln die Lösungen $h_j = h_j(x,y,\varsigma,x,\tau)$ $(j \in \mathbb{N},\ j \neq m,m+1)$ von Gleich. (5.33a) in eine Taylorreihe,

$$\begin{aligned} h_j = {} & h_{0\tau}^j \tau + h_{0\varsigma}^j \varsigma + h_{0x}^j x + (h_{1\tau}^j \tau + h_{1\varsigma}^j \varsigma + h_{1x}^j x) x + (h_{2\tau}^j \tau + h_{2\varsigma}^j \varsigma + h_{2x}^j x) y + \sum_{k=2}^{4} \sum_{k_1+k_2=k} h_{k_1 k_2}^j x^{k_1} y^{k_2} \\ & + \tilde{h}_j(x,y,\varsigma,x,\tau), \end{aligned} \quad (5.34)$$

wobei $\tilde{h}_j$ alle höheren Terme der Taylorentwicklung von h_j enthält. Setze $r_j^m := 1/\gamma_j(\lambda_m^0, \mu_m) > 0$ $(j \neq m,m+1)$. Einsetzen von (5.34) in (5.33a) ergibt mit (5.33b) durch Koeffizientenvergleich:

$$h_j = 5j^2 U_j r_j^1 \tau + \frac{\delta_{j3}}{20\pi}(x^3 - 3xy^2) + \frac{3\delta_{j4}}{50\pi} x^2 y + \frac{3\delta_{j5}}{252\pi} xy^2 + \frac{\delta_{j6}}{560\pi} y^3 + \tilde{h}_j \quad \text{für } m=1, \quad (5.35a)$$

$$\begin{aligned} h_j = {} & 2\lambda_m^0 j^2 U_j r_j^m \tau + \frac{\mu_m}{2}\Big[r_{3m+3}^m \delta_{j,3m+3} y^3 + 3(r_{3m+2}^m \delta_{j,3m+2} - r_{m+2}^m \delta_{j,m+2}) xy^2 \\ & + 3(r_{3m+1}^m \delta_{j,3m+1} - r_{m-1}^m \delta_{j,m-1}) x^2 y + r_{3m}^m \delta_{j,3m} x^3 \Big] + \tilde{h}_j \quad \text{für } m \geq 2. \end{aligned} \quad (5.35b)$$

Die Funktion (5.36)

$$g(x,y,\varsigma,x,\tau) := \mathcal{R}(xv_m + yv_{m+1} + \sum_{j=1;j\neq m,m+1}^{\infty} h_j(x,y,\varsigma,x,\tau) v_j, \lambda_m^0 + \varsigma, \mu_m + x, \tau)$$

wird ebenfalls in eine Taylorreihe entwickelt,

$$g(x,y,\varsigma,x,\tau) = g_1(x,y,\varsigma,x,\tau) + \tilde{g}(x,y,\varsigma,x,\tau), \quad (5.37)$$

wobei g_1 alle Terme der Form

$\mathfrak{s}^j x^k \tau^l$ $(1 \leqslant j+k+l \leqslant 2)$, $(a\mathfrak{s}+bx+c\tau)x^j y^k$ $(1 \leqslant j+k \leqslant 3)$, $x^j y^k$ $(3 \leqslant j+k \leqslant 6)$, enthalte, während alle übrigen Terme der Taylorentwicklung von g in $\tilde{g}$ enthalten seien. Einsetzen von (5.35) in (5.36) ergibt:

$$g_1 = -\gamma_o\tau^2 - 2\tau\left[m^2 U_m x + (m+1)^2 U_{m+1} y\right] + \tfrac{1}{2}\left[\chi - 2m^2\mathfrak{s}\right]x^2 + \tfrac{1}{2}\left[\chi - 2(m+1)^2\mathfrak{s}\right]y^2$$
$$-\tau(g_{30}x^3 + g_{21}x^2 y + g_{12}xy^2 + g_{03}y^3) + d_o(x^4+y^4+4x^2y^2) - g_{60}x^6 - g_{42}x^4y^2 - g_{24}x^2y^4 - g_{06}y^6, \tag{5.38}$$

wobei

$$\gamma_o = 2(\lambda_m^o)^2 \sum_{k=1;\,k\neq m,m+1}^{\infty} r_k^m k^4 U_k^2, \quad d_o = 3\mu_m/8\pi, \tag{5.39a}$$

m=1: $g_{30}=9U_3/4\pi$, $g_{03}=9U_6/28\pi$, $g_{21}=24U_4/5\pi$, $g_{12}=375U_5/252\pi - 27U_3/4\pi$,
$g_{60}=1/20\pi^2$, $g_{42}=-3/25\pi^2$, $g_{24}=17/315\pi^2$, $g_{06}=1/560\pi^2$, (5.39b)

$m \geqslant 2$: $g_{30}=9\mu_m\lambda_m^o m^2 U_{3m} r_{3m}^m/\pi$, $g_{03}=9\mu_m\lambda_m^o (m+1)^2 U_{3m+3} r_{3m+3}^m/\pi$,
$g_{21} = 3\mu_m\lambda_m^o\left[(3m+1)^2 U_{3m+1} r_{3m+1}^m - (m-1)^2 U_{m-1} r_{m-1}^m\right]/\pi$,
$g_{12} = 3\mu_m\lambda_m^o\left[(3m+2)^2 U_{3m+2} r_{3m+2}^m - (m+2)^2 U_{m+2} r_{m+2}^m\right]/\pi$, (5.39c)
$g_{60} = \mu_m^2 r_{3m}^m/8\pi^2$, $g_{42} = 9\mu_m^2(r_{m-1}^m + r_{3m+1}^m)/8\pi^2$,
$g_{06} = \mu_m^2 r_{3m+3}^m/8\pi^2$, $g_{24} = 9\mu_m^2(r_{m+2}^m + r_{3m+2}^m)/8\pi^2$.

(1) Bifurkation für $\tau=0$:

Im Anhang B wird gezeigt, daß g für $\tau=0$ eine analytische Funktion von x^2, y^2 ist,

$$g(x,y,\mathfrak{s},\chi,0) = -2\mathfrak{s}_1 x^2 - 2\mathfrak{s}_2 y^2 + (d_o + \tfrac{3\chi}{8\pi})(x^4+y^4+4x^2y^2) - g_{60}x^6 - g_{42}x^4y^2 - g_{24}x^2y^4$$
$$-g_{06}y^6 + \hat{g}(x^2,y^2,\mathfrak{s},\chi), \tag{5.40}$$

wobei

$$4\mathfrak{s}_1 := 2m^2\mathfrak{s} - \chi, \qquad \chi = 4\left[m^2\mathfrak{s}_2 - (m+1)^2\mathfrak{s}_1\right]/(2m+1)$$
bzw.
$$4\mathfrak{s}_2 := 2(m+1)^2\mathfrak{s} - \chi, \qquad \mathfrak{s} = 2(\mathfrak{s}_2 - \mathfrak{s}_1)/(2m+1)$$

und
$$\hat{g}(x^2,y^2,\mathfrak{s},\chi) = \sum_{j+k\geqslant 3} g_{jk}(\mathfrak{s},\chi)x^{2j}y^{2k}$$

mit $\hat{g}_{jk}(0,0)=0$ für $j+k=3$. Die Lösungen von (5.2) sind für $\tau=0$ eindeutig bestimmt aus den Lösungen der Gleichungen

$$\tfrac{\partial}{\partial x}g(x,y,\mathfrak{s},\chi,0) = 4x\left\{-\mathfrak{s}_1 + x^2\left[d_o + \tfrac{3\chi}{8\pi} - \tfrac{3}{2}g_{60}x^2 - g_{42}y^2 + \ldots\right] + y^2\left[2d_o + \tfrac{3\chi}{4\pi} - \tfrac{1}{2}g_{24}y^2 + \ldots\right]\right\}$$
$$= 0, \tag{5.41a}$$
$$\tfrac{\partial}{\partial y}g(x,y,\mathfrak{s},\chi,0) = 4y\left\{-\mathfrak{s}_2 + y^2\left[d_o + \tfrac{3\chi}{8\pi} - \tfrac{3}{2}g_{06}y^2 - g_{24}x^2 + \ldots\right] + x^2\left[2d_o + \tfrac{3\chi}{4\pi} - \tfrac{1}{2}g_{42}x^2 + \ldots\right]\right\}$$
$$= 0. \tag{5.41b}$$

Neben der trivialen Lösung x=y=0 (u=0 als Lösung von (5.2)) gibt es zu (5.41)

acht verschiedene nichttriviale Lösungszweige. Vier Lösungen sind gegeben durch

$$x = 0\ ,\quad y = y_{1,2}(\varsigma_1,\varsigma_2) = \pm\,(\varsigma_2/d_o)^{1/2}\left[1 + \alpha_1(\varsigma_1,\varsigma_2)\right]\ ,\varsigma_2 \geq 0 \tag{5.42}$$

$$y = 0,\quad x = x_{1,2}(\varsigma_1,\varsigma_2) = \pm\,(\varsigma_1/d_o)^{1/2}\left[1 + \alpha_2(\varsigma_1,\varsigma_2)\right]\ ,\varsigma_1 \geq 0 \tag{5.43}$$

mit analytischen Funktionen α_1, α_2, $\alpha_1(0,0)=\alpha_2(0,0)=0$. Die übrigen vier Lösungen sind die Lösungen des Gleichungssystems (5.44),

$$-\varsigma_1+x^2\left[d_o+\frac{3x}{8\pi}-\frac{3}{2}g_{60}x^2-g_{42}y^2+\ldots\right]+y^2\left[2d_o+\frac{3x}{4\pi}-\frac{1}{2}g_{24}y^2+\ldots\right]=0 \tag{5.44a}$$

$$-\varsigma_2+y^2\left[d_o+\frac{3x}{8\pi}-\frac{3}{2}g_{06}y^2-g_{24}x^2+\ldots\right]+x^2\left[2d_o+\frac{3x}{4\pi}-\frac{1}{2}g_{42}x^2+\ldots\right]=0. \tag{5.44b}$$

Da die linken Seiten von (5.44) analytische Funktionen von $(x^2,y^2,\varsigma_1,\varsigma_2)$ sind, kann das Gleichungssystem (5.44) nach $z_1=x^2$, $z_2=y^2$ aufgelöst werden. Eine Störungsrechnung ergibt

$$z_1 = z_1(\varsigma_1,\varsigma_2) = (2\varsigma_2-\varsigma_1)/3d_o + a_{20}\varsigma_1^2 + 2a_{11}\varsigma_1\varsigma_2 + a_{02}\varsigma_2^2 + \ldots \tag{5.45a}$$

$$z_2 = z_2(\varsigma_1,\varsigma_2) = (2\varsigma_1-\varsigma_2)/3d_o + b_{20}\varsigma_1^2 + 2b_{11}\varsigma_1\varsigma_2 + b_{02}\varsigma_2^2 + \ldots \tag{5.45b}$$

mit

$$d_o^2a_{20} = -\frac{(m+1)^2}{2\pi(2m+1)} + (6g_{06} - g_{60} + 2g_{42} - 4g_{24})/18d_o$$

$$d_o^2b_{20} = \frac{(m+1)^2}{\pi(2m+1)} + (2g_{60} - 4g_{06} + 4g_{24} - 3g_{42})/18d_o$$

$$d_o^2a_{02} = -\frac{m^2}{\pi(2m+1)} + (2g_{06} - 4g_{60} + 4g_{42} - 3g_{24})/18d_o$$

$$d_o^2b_{02} = \frac{m^2}{2\pi(2m+1)} + (6g_{60} - g_{06} + 2g_{24} - 4g_{42})/18d_o$$

$$a_{11} = -\left[2(m+1)^2-m^2\right]/4\pi d_o^2(2m+1) + b_{20},\quad b_{11} = \left[2m^2-(m+1)^2\right]/4\pi d_o^2(2m+1) + a_{02}$$

Setzt man $z_1(\varsigma_1,\varsigma_2)=0$, so erhält man eine (analytische) Kurve in der ς_1-ς_2-Ebene,

$$\varsigma_1 = \bar{\varsigma}_1(\varsigma_2) = 2\varsigma_2 + 3d_o(4a_{20}+4a_{11}+a_{02})\varsigma_2^2 + o(\varsigma_2^2), \tag{5.46a}$$

bzw.

$$\varsigma_2 = \bar{\varsigma}_2(\varsigma_1) = \varsigma_1/2 - 3d_o(4a_{20}+4a_{11}+a_{02})\varsigma_1^2/8 + o(\varsigma_1^2), \tag{5.46b}$$

und es gilt $z_1(\varsigma_1,\varsigma_2)\gtrless 0$ für $(\varsigma_1,\varsigma_2)$ mit $\varsigma_1 \lessgtr \bar{\varsigma}_1(\varsigma_2)$ bzw. $\varsigma_2 \gtrless \bar{\varsigma}_2(\varsigma_1)$. Analog erhält man durch Nullsetzen von $z_2(\varsigma_1,\varsigma_2)$ eine Kurve

$$\varsigma_1 = \tilde{\varsigma}_1(\varsigma_2) = \varsigma_2/2 - 3d_o(b_{20}+4b_{11}+4b_{02})\varsigma_2^2/8 + o(\varsigma_2^2) \tag{5.47a}$$

bzw.

$$\varsigma_2 = \tilde{\varsigma}_2(\varsigma_1) = 2\varsigma_1 + 3d_o(b_{20}+4b_{11}+4b_{02})\varsigma_1^2 + o(\varsigma_1^2) \tag{5.47b}$$

und es gilt $z_2(\varsigma_1,\varsigma_2)\gtrless 0$ für $(\varsigma_1,\varsigma_2)$ mit $\varsigma_1 \gtrless \tilde{\varsigma}_1(\varsigma_2)$ bzw. $\varsigma_2 \lessgtr \tilde{\varsigma}_2(\varsigma_1)$. Man erhält somit die übrigen vier Lösungen von (5.41) zu

$$x = x_{3,4}(\varsigma_1,\varsigma_2) = \pm\,(z_1(\varsigma_1,\varsigma_2))^{1/2}, \tag{5.48a}$$

$$y = y_{3,4}(\varsigma_1,\varsigma_2) = \pm\,(z_2(\varsigma_1,\varsigma_2))^{1/2}, \tag{5.48b}$$

wobei jedes Paar (x_j,y_i) $(j,i\in\{3,4\})$ eine Lösung von (5.41) ist. Die Lösungen (5.48)sind definiert für (ϱ_1,ϱ_2) mit $\tilde{\varrho}_1(\varrho_2)<\varrho_1\leq\bar{\varrho}_1(\varrho_2)$, bzw. $\bar{\varrho}_2(\varrho_1)\leq\varrho_2\leq\tilde{\varrho}_2(\varrho_1)$. Auf der Kurve (5.46) ist $x_{3,4}=0$, woraus mit (5.41), (5.42) und (5.44b) folgt, daß

$$y_{1,2}(\bar{\varrho}_1(\varrho_2),\varrho_2) = y_{3,4}(\bar{\varrho}_1(\varrho_2),\varrho_2). \tag{5.49a}$$

Ebenso ist $y_{3,4}=0$ auf der Kurve (5.47) und mit (5.41), (5.42) und (5.44a) folgt, daß

$$x_{1,2}(\varrho_1,\tilde{\varrho}_2(\varrho_1)) = x_{3,4}(\varrho_1,\tilde{\varrho}_2(\varrho_1)). \tag{5.49b}$$

Auf der Kurve (5.46) gehen also die vier Lösungen (5.48) in die beiden Lösungen (5.42) über, während sie auf der Kurve (5.47) in (5.43) übergehen, es tritt somit sekundäre Bifurkation ein [42].

Stabilitätsanalyse: Wir untersuchen nun die Stabilität der acht Lösungszweige (5.42), (5.43) und (5.48). Die zu einer Lösung $x=x(\varrho_1,\varrho_2)$, $y=y(\varrho_1,\varrho_2)$ von (5.41) assoziierte Lösung von (5.2) ist stabil, wenn die Matrix

$$G = G(x,y,\varrho_1,\varrho_2) = \begin{bmatrix} \partial^2 g/\partial x^2 & \partial^2 g/\partial x\partial y \\ \partial^2 g/\partial x\partial y & \partial^2 g/\partial y^2 \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

an der Stelle $x=x(\varrho_1,\varrho_2)$, $y=y(\varrho_1,\varrho_2)$ zwei positive Eigenwerte besitzt und instabil, wenn ein Eigenwert negativ ist. Aus (5.41a), (5.44a) und (5.49a) folgt, daß

$$\partial^2 g(0,y,\varrho,x,0)/\partial x^2\big|_{\varrho_2=\bar{\varrho}_2(\varrho_1),\,y=y_{1,2}(\varrho_1,\bar{\varrho}_2(\varrho_1))} = 0 \tag{5.51}$$

und daraus

$$\partial^2 g(0,y,\varrho,x,0)/\partial x^2\big|_{y=y_{1,2}(\varrho_1,\varrho_2)} = 4(\bar{\varrho}_1(\varrho_2)-\varrho_1)\left[1+\bar{\alpha}_1(\varrho_1,\varrho_2)\right] \tag{5.52a}$$

mit einer analytischen Funktion $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_1(0,0)=0$. (Die Analytizität von $\bar{\alpha}_1$ folgt aus (5.42) und der Tatsache, daß $\partial^2 g/\partial x^2$ analytisch von $(x^2,y^2,\varrho_1,\varrho_2)$ abhängt.) Weiter gilt, daß

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} g(0,y,\varrho,x,0)\big|_{y=y_{1,2}(\varrho_1,\varrho_2)} = 8\varrho_2\left[1+\bar{\alpha}_2(\varrho_1,\varrho_2)\right] \tag{5.52b}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} g(0,y,\varrho,x,0)\big|_{y=y_{1,2}(\varrho_1,\varrho_2)} = 0, \tag{5.52c}$$

wobei $\bar{\alpha}_2$ analytisch, $\bar{\alpha}_2(0,0)=0$. Mit (5.52) sind die zu den Lösungen (5.42) assoziierten Lösungen von (5.2) stabil für (ϱ_1,ϱ_2) mit $\varrho_2>0$ und $\varrho_1<\bar{\varrho}_1(\varrho_2)$, und instabil, falls $\varrho_2<0$ oder $\varrho_1>\bar{\varrho}_1(\varrho_2)$. Analog zu (5.52) erhält man

$$\partial^2 g(x,0,\varrho,x,0)/\partial x^2\big|_{x=x_{1,2}(\varrho_1,\varrho_2)} = 8\varrho_1\left[1+\tilde{\alpha}_1(\varrho_1,\varrho_2)\right] \tag{5.53a}$$

$$\partial^2 g(x,0,\varrho,x,0)/\partial y^2\big|_{x=x_{1,2}(\varrho_1,\varrho_2)} = 4(\tilde{\varrho}_2(\varrho_1)-\varrho_2)\left[1+\tilde{\alpha}_2(\varrho_1,\varrho_2)\right] \tag{5.53b}$$

$$\partial^2 g(x,0,\varrho,x,0)/\partial x\partial y\big|_{x=x_{1,2}(\varrho_1,\varrho_2)} = 0 \tag{5.53c}$$

mit analytischen Funktionen $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_1(0,0)=\tilde{\alpha}_2(0,0)=0$. Die zu den Lösungen (5.43) assoziierten Lösungen von (5.2) sind somit stabil für (ϱ_1,ϱ_2) mit $\varrho_2<\tilde{\varrho}_2(\varrho_1)$ und

$\mathcal{S}_1 > 0$, und instabil, falls $\mathcal{S}_1 < 0$ oder $\mathcal{S}_2 > \tilde{\mathcal{S}}_2(\mathcal{S}_1)$. Zur Stabilitätsanalyse der vier Lösungen (5.48) ist es zweckmäßig, eine(diffeomorphe)Koordinatentransformation durchzuführen:

$$\mathcal{S}_1 \to \hat{\mathcal{S}}_1 := \bar{\mathcal{S}}_1(\mathcal{S}_2) - \mathcal{S}_1$$
$$\mathcal{S}_2 \to \hat{\mathcal{S}}_2 := \tilde{\mathcal{S}}_2(\mathcal{S}_1) - \mathcal{S}_2 \quad , \quad \frac{\partial(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2)}{\partial(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)}\Big|_{\mathcal{S}_1=\mathcal{S}_2=0} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}. \tag{5.54}$$

In den neuen Koordinaten ergibt sich für $z_i(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2) := z_i(\mathcal{S}_1(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2),\mathcal{S}_2(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2))$ $(i=1,2)$, daß $z_1(0,\hat{\mathcal{S}}_2)=z_2(\hat{\mathcal{S}}_1,0)=0$, woraus mit (5.45) folgt, daß

$$3d_0 z_1(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2) = \hat{\mathcal{S}}_1\left[1 + \beta_1(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2)\right] \ , \ \beta_1(0,0)=0, \tag{5.55a}$$
$$3d_0 z_2(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2) = \hat{\mathcal{S}}_2\left[1 + \beta_2(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2)\right] \ , \ \beta_2(0,0)=0. \tag{5.55b}$$

Für die Lösungen (5.48) erhält man daraus folgende Abhängigkeit in den Variablen $(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2)$,

$$x_{3,4}(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2) = \pm\,(\hat{\mathcal{S}}_1/3d_0)^{1/2}\left[1 + \alpha_3(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2)\right], \ \alpha_3(0,0)=0, \tag{5.56a}$$
$$y_{3,4}(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2) = \pm\,(\hat{\mathcal{S}}_2/3d_0)^{1/2}\left[1 + \alpha_4(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2)\right], \ \alpha_4(0,0)=0. \tag{5.56b}$$

Die Lösungen (5.56) sind definiert für $\hat{\mathcal{S}}_1 \geq 0$ und $\hat{\mathcal{S}}_2 \geq 0$. Für $\hat{\mathcal{S}}_1=0$ ist $x_{3,4}=0$. Mit (5.41a) folgt daraus, daß

$$\partial^2 g(0,y,\mathcal{S},\chi,0)/\partial x^2\big|_{\hat{\mathcal{S}}_1=0,\ y=y_{3,4}(0,\hat{\mathcal{S}}_1)} = 0$$

und damit

$$\partial^2 g(x,y,\mathcal{S},\chi,0)/\partial x^2\big|_{x=x_{3,4}(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2),\,y=y_{3,4}(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2)} = \frac{8}{3}\hat{\mathcal{S}}_1(1+\tilde{\alpha}_3(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2)), \ \tilde{\alpha}_3(0,0)=0. \tag{5.57a}$$

Analog erhält man

$$\partial^2 g(x,y,\mathcal{S},\chi,0)/\partial y^2\big|_{x=x_{3,4}(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2),\,y=y_{3,4}(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2)} = \frac{8}{3}\hat{\mathcal{S}}_2(1+\tilde{\alpha}_4(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2)), \ \tilde{\alpha}_4(0,0)=0, \tag{5.57b}$$

und für die gemischte Ableitung ergibt sich:

$$\partial^2 g(x,y,\mathcal{S},\chi,0)/\partial x\partial y\big|_{x=x_{3,4}(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2),\,y=y_{3,4}(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2)} = \frac{16}{3}\sqrt{\hat{\mathcal{S}}_1\hat{\mathcal{S}}_2}(1+\tilde{\alpha}_5(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2)), \ \tilde{\alpha}_5(0,0)=0. \tag{5.57c}$$

Mit (5.57) erhält man für die Eigenwerte $L_{1,2}$ von G an der Stelle $x=x_{3,4}$, $y=y_{3,4}$:

$$L_{1,2} = \frac{4}{3}\left\{\hat{\mathcal{S}}_1(1+\tilde{\alpha}_3)+\hat{\mathcal{S}}_2(1+\tilde{\alpha}_4) \pm \left[\left[\hat{\mathcal{S}}_1(1+\tilde{\alpha}_3)+\hat{\mathcal{S}}_2(1+\tilde{\alpha}_4)\right]^2+12\hat{\mathcal{S}}_1\hat{\mathcal{S}}_2(1+\tilde{\alpha}_6)\right]^{1/2}\right\}, \tag{5.58}$$

wobei $3\tilde{\alpha}_6 := 8\tilde{\alpha}_5+4\tilde{\alpha}_5^2-\tilde{\alpha}_3-\tilde{\alpha}_4-\tilde{\alpha}_3\tilde{\alpha}_4$, $\tilde{\alpha}_6(0,0)=0$. Ein Eigenwert verschwindet, falls $\hat{\mathcal{S}}_1=0$ oder $\hat{\mathcal{S}}_2=0$, jedoch reduzieren sich dann die Lösungen (5.48) auf (5.42) oder (5.43). Für $\hat{\mathcal{S}}_1 > 0$ und $\hat{\mathcal{S}}_2 > 0$ ist stets ein Eigenwert negativ, die zu den Lösungen (5.48), bzw. (5.56) assoziierten Lösungen von (5.2) sind somit instabil.

Bifurkationsmenge: Aus (5.52)-(5.54) und (5.58) folgt sofort, daß die Bifurkationsmenge $\sum_g$ für $\gamma=0$ in der $\mathcal{S}_1$-$\mathcal{S}_2$-Ebene aus den Koordinatenachsen und den zwei Kurven

$$\mathcal{S}_1 = \bar{\mathcal{S}}_1(\mathcal{S}_2) = 2\mathcal{S}_2 + o(\mathcal{S}_2), \ \mathcal{S}_2 \geq 0 \ ; \ \mathcal{S}_2 = \tilde{\mathcal{S}}_2(\mathcal{S}_1) = 2\mathcal{S}_1 + o(\mathcal{S}_1), \ \mathcal{S}_1 \geq 0$$

besteht. Geht man von $(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)$ zu den alten Koordinaten $(\mathcal{S},\chi)$ über, so erhält man

in der ϱ-χ-Ebene für die Bifurkationsmenge folgende Kurven:

$$\chi = \chi_1^m(\varrho) := 2m^2\varrho \; ; \chi \lesseqgtr \chi_1^m(\varrho) \Leftrightarrow \varrho_1 \gtreqless 0 \; , \tag{5.59a}$$

$$\chi = \chi_2^m(\varrho) := 2(m+1)^2\varrho \; ; \chi \lesseqgtr \chi_2^m(\varrho) \Leftrightarrow \varrho_2 \gtreqless 0 \; , \tag{5.59b}$$

$$\chi = \chi_3^m(\varrho) := \left[4(m+1)^2-2m^2\right]\varrho + c\varrho^2 + o(\varrho^2), \varrho \lesseqgtr 0; \chi \lesseqgtr \chi_3^m(\varrho) \Leftrightarrow \varrho_1 \lesseqgtr \bar{\varrho}_1(\varrho_2), \tag{5.59c}$$

$$\chi = \chi_4^m(\varrho) := \left[4m^2-2(m+1)^2\right]\varrho + d\varrho^2 + o(\varrho^2), \varrho \gtreqless 0; \chi \lesseqgtr \chi_4^m(\varrho) \Leftrightarrow \varrho_2 \lesseqgtr \tilde{\varrho}_2(\varrho_1), \tag{5.59d}$$

wobei $$c = (2/3d_o^2)(10g_{06}-3g_{24})\left[m^2+(m+1)^2\right]^2,$$

$$d = (2/3d_o^2)(10g_{60}-3g_{42})\left[m^2+(m+1)^2\right]^2.$$

In erster Näherung sind die Kurven $\chi_3^m(\varrho)$, $\chi_4^m(\varrho)$ Geraden und es ist $\chi_4^m(\varrho) \lesseqgtr 0$ für m=1,2 und $\chi_4^m(\varrho) \gtreqless 0$ für $m \gtreqless 3$. Da außerdem für kleine $\varrho > 0$ gilt, daß

$$\chi_4^m(\varrho) < \chi_1^m(\varrho) < \chi_2^m(\varrho) < -\chi_3^m(-\varrho),$$

erhält man in linearer Näherung das Bifurkationsdiagramm von Fig. 13. Wir vergleichen nun diese Ergebnisse mit denen von Kap. 5.2(1). Dazu betrachten wir ein festes $\chi \neq 0$, bzw. ein fest vorgegebenes $\mu = \mu_m + \chi$ und variieren ϱ, bzw. $\lambda = \lambda_m^o + \varrho$:

(i) Es sei $\chi > 0$ bzw. $\mu_m < \mu < \mu_{m+1}$. Dann ist die triviale Lösung stabil für $\varrho < \chi/2(m+1)^2$ und instabil für $\varrho > \chi/2(m+1)^2$. Die kritische Belastung ist also gegeben durch $\varrho_c = \chi/2(m+1)^2$ bzw. $\lambda_c = \left[(m+1)^2+\mu/(m+1)^2\right]/2$. Für kleine $\varrho-\varrho_c > 0$ existieren nach Fig. 13 außer der trivialen Lösung nur die beiden Bifurkationslösungen (5.42). Die zu diesen Lösungen korrespondierenden stabilen Lösungen von (5.2) stimmen daher mit (5.23) überein, wobei in (5.23) m durch m+1 und ϱ durch $\varrho-\varrho_c$ zu ersetzen ist.

(ii) Es sei $\chi < 0$ bzw. $\mu_{m-1} < \mu < \mu_m$. Dann ist die triviale Lösung stabil für $\varrho < \chi/2m^2$ und instabil für $\varrho > \chi/2m^2$. Die kritische Belastung ist daher gegeben durch $\varrho_c = \chi/2m^2 < 0$, bzw. durch $\lambda_c = (m^2+\mu/m^2)/2$. Für kleine $\varrho-\varrho_c > 0$ existieren nach Fig. 13 außer der trivialen Lösung nur die beiden Bifurkationslösungen (5.43). Die zu diesen Lösungen korrespondierenden stabilen Lösungen von (5.2) stimmen daher ebenfalls mit (5.23) überein, wobei in (5.23) ϱ durch $\varrho-\varrho_c$ zu ersetzen ist.

Wie nicht anders zu erwarten wurden die bei der einfachen Entartung erzielten Ergebnisse für festes $\chi > 0$ bzw. $\chi < 0$ reproduziert. Zusätzlich wurden Stabilitätsgrenzen für die Bifurkationslösungen (5.42) und (5.43) erhalten: $\chi_3^m(\varrho)$ ist Stabilitätsgrenze für (5.42) und $\chi_4^m(\varrho)$ ist Stabilitätsgrenze für (5.43). In dem Existenzbereich der vier instabilen Lösungen (5.48) bzw. (5.56) liegt somit stabile "Coexistenz" von (5.42) und (5.43) vor.

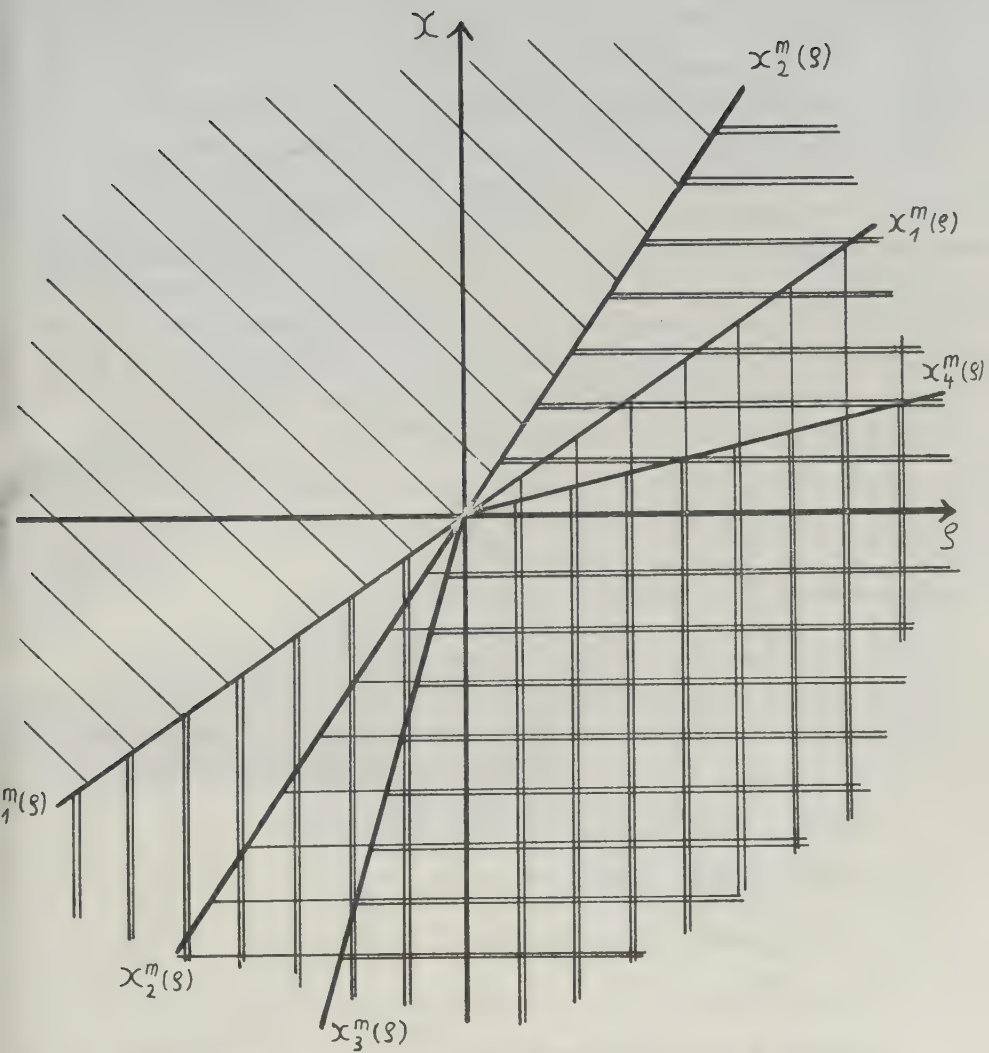


Fig. 13: Bifurkationsdiagramm bei zweifacher Entartung für $\tau=0$ in linearer Näherung. Die Kurven $x_j^m(\varsigma)$ $(1 \leq j \leq 4)$ nach Gleich. (5.59) unterteilen die χ-ς-Ebene in verschiedene Gebiete, die zu unterschiedlichem Lösungsverhalten des Randwertproblems (5.2) Anlaß geben.

\: triviale Lösung x=y=0 (u(s)=0) stabil, in allen übrigen Gebieten ist die triviale Lösung instabil.

|: instabiler Existenzbereich von (5.43), ‖: stabiler Existenzbereich von (5.43),

—: instabiler Existenzbereich von (5.42), ═: stabiler Existenzbereich von (5.42).

(2) Bifurkation für $\gamma \neq 0$:

Der 4-jet der Singularität $g_o(x,y) := g(x,y,0,0,0)$ gehört (in der Notation von Arnold) zu der unimodalen Familie $T_{2,4,4}$ (vgl. Kap. 1), die des öfteren auch mit X_9 oder als Doppel-cusp bezeichnet wird. Die Codimension eines Mitglieds

$$f_{or}(x,y) = x^4 + y^4 + rx^2y^2, \quad r^2 \neq 2,$$

von X_9 ist acht und eine universelle Entfaltung f von f_{or} ist gegeben durch

$$f(x,y,a_1,a_2,b_{20},b_{11},b_{02},c_1,c_2,d) = f_{or}(x,y) + a_1x + a_2y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + c_1x^3 + c_2y^3 + dx^2y^2.$$

Nach Kap. 2 kann g auf eine nichtverselle Entfaltung von f_{o4} transformiert werden. Man erhält

$$g(x,y,\delta,\varkappa,\gamma) = G_o + a_1X + a_2Y + b_{20}X^2 + b_{02}Y^2 + c_1X^3 + c_2Y^3 + dX^2Y^2 + f_{o4}(X,Y), \tag{5.60}$$

wobei G_o und die Entfaltungsparameter von $(\delta,\varkappa,\gamma)$; (X,Y) von $(x,y,\delta,\varkappa,\gamma)$ abhängen, und für jedes $(\delta,\varkappa,\gamma)$ nahe $(0,0,0)$ die Abbildung $(x,y) \longrightarrow (X,Y)$ ein Diffeomorphismus ist. Eine Störungsrechnung ergibt

$$G_o = -(\gamma_o + \hat{G}_o)\gamma^2 + \ldots\,, \quad a_1 = -G_{10}\gamma + \ldots\,, \quad a_2 = -G_{01}\gamma + \ldots\,, \quad b_{20} = G_2(\varkappa - 2m^2\delta) + \ldots\,,$$

$$b_{02} = G_2(\varkappa - 2(m+1)^2\delta) + \ldots\,, \quad c_1 = G_{30}\gamma + \ldots\,, \quad c_2 = G_{03}\gamma + \ldots\,,$$

$$d = G_{22}^m(\varkappa - 2m^2\delta) + G_{22}^{m+1}(\varkappa - 2(m+1)^2\delta) + \ldots\,,$$

$$X = R_o\gamma + \frac{x}{A} + A_{30}x^3 + A_{12}xy^2 - R(\varkappa - 2m^2\delta)x + L\varkappa x + \ldots\,,$$

$$Y = Q_o\gamma + \frac{y}{A} + A_{03}y^3 + A_{21}x^2y - Q(\varkappa - 2(m+1)^2\delta)y + L\varkappa y + \ldots\,,$$

mit $A = d_o^{-1/4}$, $A_{30} = \frac{1}{4}A^3g_{60}$, $A_{03} = \frac{1}{4}A^3g_{06}$, $A_{12} = \frac{A^3}{12}\left[2(g_{24}+g_{60}) - 4g_{06} - g_{42}\right]$,

$A_{21} = \frac{A^3}{12}\left[2(g_{42}+g_{06}) - 4g_{60} - g_{24}\right]$, $R_o = \frac{1}{8}\left[A^3g_{12} + 2A^4A_{12}U_m m^2\right]$,

$Q_o = \frac{1}{8}\left[A^3g_{21} + 2A^4A_{21}U_{m+1}(m+1)^2\right]$, $R = \frac{1}{4}A^4A_{30}$, $Q = \frac{1}{4}A^4A_{03}$, $L = 1/4A\mu_m$,

$\hat{G}_o = 2A\left[m^2U_mR_o + (m+1)^2U_{m+1}Q_o\right]$, $G_{10} = 2AU_m m^2$, $G_{01} = 2AU_{m+1}(m+1)^2$, $G_2 = A^2/2$,

$G_{30} = A^3g_{30} + 2A^4A_{30}U_m m^2 - 4R_o$, $G_{03} = A^3g_{03} + 2A^4A_{03}U_{m+1}(m+1)^2 - 4Q_o$,

$G_{22}^m = A^5(2A_{30} - A_{21})$, $G_{22}^{m+1} = A^5(2A_{03} - A_{12})$.

Wir nehmen an, daß $U_m \neq 0$. Dann ist die Abbildung $(\delta,\varkappa,\gamma) \longrightarrow (b_{20},b_{02},a_1)$ ein Diffeomorphismus. Die rechte Seite von (5.60) kann daher als Darstellung von g in neuen Koordinaten (X,Y,b_{20},b_{02},a_1) interpretiert werden, wobei (a_2,c_1,c_2,d) von (b_{20},b_{02},a_1) abhängen. Die Bifurkationsmenge von g wird somit via der Koordinatentransformation $(\delta,\varkappa,\gamma) \longrightarrow (b_{20},b_{02},a_1)$ auf eine zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit der im achtdimensionalen Raum der Entfaltungsparameter von f eingebetteten

siebendimensionalenBifurkationsmenge $\sum_f$ abgebildet. Es müßten also Zustandsfläche und Bifurkationsmenge des Doppel-cusps mit $b_{11}=0$, $r=4$, untersucht werden, was allerdings analytisch nicht möglich ist, da die Gleichungen $\partial f/\partial X=\partial f/\partial Y=0$ für die Zustandsfläche und das Gleichungssystem

$$\partial f/\partial X = \partial f/\partial Y = \det \begin{bmatrix} \partial^2 f/\partial X^2 & \partial^2 f/\partial X \partial Y \\ \partial^2 f/\partial X \partial Y & \partial^2 f/\partial Y^2 \end{bmatrix} = 0$$

für die Bifurkationsmenge zu kompliziert sind, falls $a_1, a_2, c_1, c_2 \neq 0$. Wir beschränken uns daher auf qualitative Überlegungen:

Die Bifurkationsmenge besteht im $\mathcal{S}$-$\mathcal{X}$-$\mathcal{T}$-Raum aus mehreren Flächen, die die Ebene $\mathcal{T}=0$ in den Kurven $\mathcal{X}_j^m(\mathcal{S})$ $(1 \leq j \leq 4)$ schneiden (Fig.13). Nach Kap. 5.2(2) ist in den Schnittkurven der Bifurkationsmenge mit den Ebenen $\mathcal{X}$=constant jeweils für $\mathcal{X} > 0$ und $\mathcal{X} < 0$ der cusp von Fig. 9 enthalten. Für $\mathcal{X} < 0$ gibt es innerhalb der cusp-Linien (in der $\mathcal{S}$-$\mathcal{T}$-Ebene) eine instabile und zwei stabile Lösungen von (5.2), wobei die m-te Mode dominiert. Für $\mathcal{T} \longrightarrow 0$ geht die instabile Lösung in die triviale Lösung über, während die beiden stabilen Lösungen durch (5.23) gegeben sind. Analog erhält man für $\mathcal{X} > 0$ einen cusp in der $\mathcal{S}$-$\mathcal{T}$-Ebene, jedoch ist hier bei den beiden stabilen Bifurkationslösungen von (5.2) innerhalb der cusp-Linien die m+1-te Mode dominierend. Für $\mathcal{X} < 0$ liegen die Spitzen der cusp-Linien auf der Gerade $\mathcal{X}_1^m(\mathcal{S})$ und für $\mathcal{X} > 0$ auf der Gerade $\mathcal{X}_2^m(\mathcal{S})$ (in der $\mathcal{S}$-$\mathcal{X}$-Ebene, vgl. Fig. 14). Der Doppel-cusp beschreibt somit den Übergang von cusp-Linien bzgl. der Mode m zu cusp-Linien bzgl. der Mode m+1, was nachträglich die Bezeichnung "Doppel-cusp" rechtfertigt. Ohne Computerrechnungen kann jedoch nichts darüber ausgesagt werden, wie sich die cusp-Kurven in der $\mathcal{S}$-$\mathcal{T}$-Ebene beim Übergang von $\mathcal{X} < 0$ nach $\mathcal{X} > 0$ verhalten, ebensowenig wie Aussagen über die Fortsetzung der Kurven $\mathcal{X}_3^m(\mathcal{S})$, $\mathcal{X}_4^m(\mathcal{S})$ als Flächen im $\mathcal{S}$-$\mathcal{X}$-$\mathcal{T}$-Raum gemacht werden können.

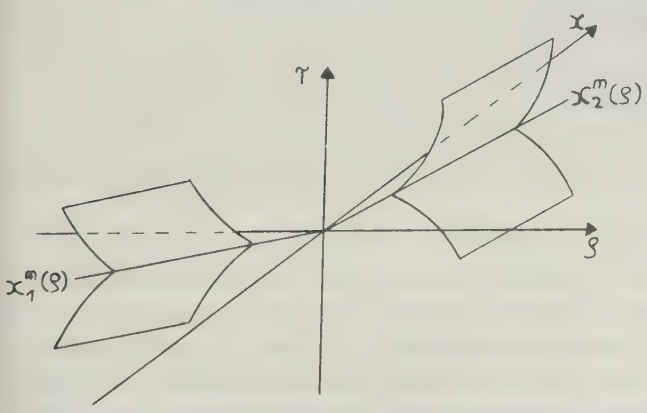


Fig. 14: Teil der Bifurkationsmenge von g, Gl. (5.38), im $\mathcal{S}$-$\mathcal{X}$-$\mathcal{T}$-Raum. Auf den Geraden $\mathcal{X}_1^m(\mathcal{S})$, bzw. $\mathcal{X}_2^m(\mathcal{S})$ liegen Spitzen von cusp-Linien. Ohne Computerrechnungen kann jedoch nichts darüber ausgesagt werden, wie sich die von den cusp-Linien gebildeten Flächen beim Übergang von $\mathcal{X} < 0$ nach $\mathcal{X} > 0$ verhalten.

6. ANWENDUNG AUF DIE NICHTGLEICHGEWICHTSTHERMODYNAMIK

Ein interessantes Anwendungsgebiet der vorangehenden Überlegungen bildet die Thermodynamik irreversibler Prozesse. Wir skizzieren daher kurz die Bedeutung des mathematischen Formalismus von Teil I für diese physikalische Disziplin. Dazu betrachten wir ein thermodynamisches System, das durch n extensive Dichtevariable $\alpha_i = \alpha_i(x,t)$ $(1 \leq i \leq n)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, charakterisiert ist, t sei die Zeit. Unter der Hypothese des lokalen Gleichgewichts [43] existiert eine Entropiegrundfunktion $s=s(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,x)$ mit der Entropiedichte s. Allgemein gilt für die α_i eine Kontinuitätsgleichung,

$$\partial\alpha_i/\partial t = -\nabla\cdot\vec{J}_i + \sigma_i, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{6.1}$$

wobei $\vec{J}_i$ der makroskopische Fluß und σ_i der Quellterm der Variablen α_i ist. $p_i := \partial s/\partial\alpha_i$ sei die zu α_i korrespondierende intensive (Dichte-) Variable. Für die zeitliche Änderung der Entropiedichte erhält man mit (6.1):

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\nabla\cdot\Big[\sum_{i=1}^{n} p_i\vec{J}_i\Big] + \sum_{i=1}^{n}\Big[\nabla p_i\cdot\vec{J}_i + p_i\sigma_i\Big] \tag{6.2}$$

Der Entropiefluß ist somit gegeben durch

$$\vec{J}[s] = \sum_{i=1}^{n} p_i\vec{J}_i,$$

und für die lokale Entropieproduktion erhält man

$$\sigma[s] = \sum_{i=1}^{n}\Big[\nabla p_i\cdot\vec{J}_i + p_i\sigma_i\Big] =: \sum_{l} K_l F_l, \tag{6.3}$$

wobei die Entropieproduktion wie üblich in verallgemeinerte Flüsse $\{F_l\} := \{\vec{J}_i,\sigma_i\}$ und verallgemeinerte Kräfte $\{K_l\} := \{\nabla p_i, p_i\}$ aufgespalten wurde. In der linearen irreversiblen Thermodynamik nimmt man eine lineare Abhängigkeit der Flüsse F_l von den Kräften K_l an,

$$F_l = \sum_{r} L_{lr}K_r, \tag{6.4}$$

wobei nur lokale Abhängigkeiten berücksichtigt wurden. Die Onsager-Koeffizienten L_{lr} genügen der Reziprozitätsrelation $L_{rl}=L_{lr}$ [44] (die Reziprozitätsrelationen folgen aus der Zeitinversionsinvarianz der mikroskopischen Bewegungsgleichungen), so daß die verallgemeinerten thermodynamischen Flüsse geschrieben werden können als

$$F_j = \frac{\partial}{\partial K_j}\frac{1}{2}\sum_{r,l} L_{rl}K_rK_l. \tag{6.5}$$

Eine Verallgemeinerung von Gleich. (6.5) wurde von Edelen [45] entwickelt. Er postulierte für die nichtlineare Thermodynamik die Existenz einer Funktion $R = R(K_l,\lambda,x)$, so daß $F_l=\partial R/\partial K_l$. Dabei seien $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ äußere Parameter, z.B. fest vorgegebene Konzentrationen bei chemischen Reaktionen etc. Für die Flüsse folgt $\partial F_r/\partial K_l=\partial F_l/\partial K_r$, was sich als Verallgemeinerung der Onsager'sche Reziprozi-

tätsrelationen verstehen läßt. Wir leiten nun einige Beziehungen ab, die sich aus der Existenz von R ergeben:

(1) Es sei

$$P := \int_\Omega \mathfrak{s}[s]\,dx$$

die totale Entropieproduktion. Dann lautet das von Glansdorff und Prigogine [46] deduzierte, allgemein gültige Evolutionskriterium:

$$d_K P/dt := \int_\Omega \sum_l F_l \dot{K}_l\,dx \leqslant 0 \quad (\dot{\ } := \partial/\partial t). \tag{6.6}$$

Definiert man das Funktional $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}[p,\lambda]$ $(p := (p_1,\ldots,p_n))$ durch

$$\mathfrak{R} := \int_\Omega R\,dx, \tag{6.7}$$

so erhält man

$$\dot{\mathfrak{R}} = \int_\Omega \dot{R}\,dx = d_K P/dt. \tag{6.8}$$

Das Evolutionskriterium (6.6) nimmt daher die einfache Form $\dot{\mathfrak{R}} \leqslant 0$ an. Damit kommt dem Funktional $\mathfrak{R}$ (Gleich. (6.7)) eine besondere physikalische Bedeutung zu: Die zeitliche Entwicklung thermodynamischer Systeme verläuft so, daß $\mathfrak{R}$ abnimmt.

(2) Die Matrix $s_{ij} := \partial^2 s/\partial\alpha_i\partial\alpha_j$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ sei negativ definit. Aus den Kontinuitätsgleichungen (6.1) für die α_i erhält man folgende Kontinuitätsgleichungen für die intensiven Variablen p_i:

$$\partial p_i/\partial t = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\left[\frac{\partial R}{\partial p_j} - \nabla\cdot\frac{\partial R}{\partial \nabla p_j}\right], \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{6.9}$$

Die stationären Zustände$(\partial p_i/\partial t = 0)$ sind somit durch die Lösungen der zu R assoziierten Euler-Lagrange-Gleichung bestimmt. Falls Dirichlet'sche Randbedingungen vorliegen (oder auch von Neumann'sche Randbedingungen, da sich die Ergebnisse von Kap. 4 ohne Schwierigkeiten auch für andere Randbedingungen formulieren lassen), können die stationären Lösungen von Gleich. (6.9) nach den Methoden von Kap. 4 eindeutig den stationären Punkten der Entfaltung einer Singularität und damit einem Katastrophenpolynom zugeordnet werden. Die Klassifikationsaussagen der Katastrophentheorie übertragen sich damit auf verallgemeinerte Phasenübergänge der irreversiblen Thermodynamik.

(3) $g(y,\lambda)$ $(y=(y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m)$ sei die der Euler-Lagrange-Gleichung von R zugeordnete Entfaltung der Singularität $g_0(y) = g(y,0)$. y_λ sei ein stationärer Punkt von g und $p_\lambda = \{p_{i\lambda} = p_{i\lambda}(x)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sei der zu y_λ korrespondierende stationäre Zustand, d.h. die $p_{i\lambda}$ genügen der zu R assoziierten Euler-Lagrange-Gleichung. Glansdorff und Prigogine leiteten auf makroskopischer Grundlage ein Stabilitätskriterium für p ab, das von Schlögl [47] und Pfaffelhuber [48] auf statistischer Basis erweitert wurde: p_λ ist ein asymptotisch stabiler stationärer Zustand, wenn für

kleine Abweichungen ΔK_l, ΔF_l gilt, daß

$$\int_\Omega \sum_l \Delta K_l \Delta F_l dx > 0. \tag{6.10}$$

Betrachtet man kleine Abweichungen $p_{i\lambda} \longrightarrow p_{i\lambda} + \tilde{p}_i$, so zeigt man unter Verwendung des Gauß'schen Satzes leicht, daß das Glansdorff-Prigogine'sche Stabilitätskriterium die folgende Form annimmt:

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i (L[p_\lambda]\tilde{p})_i dx > 0 \quad (\tilde{p} := (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n)), \tag{6.11}$$

mit dem linearen Differentialoperator $L[p_\lambda]$,

$$(L[p_\lambda]\tilde{p})_i := \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 R}{\partial p_i \partial p_j} \tilde{p}_j + \frac{\partial^2 R}{\partial p_i \partial \nabla p_j} \cdot \nabla \tilde{p}_j - \nabla \cdot \left[\frac{\partial^2 R}{\partial \nabla p_i \partial p_j} \tilde{p}_j + \frac{\partial^2 R}{\partial \nabla p_i \partial \nabla p_j} \cdot \nabla \tilde{p}_j \right] \right\}, \tag{6.12}$$

wobei die Ableitungen von R an der Stelle $p=p_\lambda$, $\nabla p = \nabla p_\lambda$ zu nehmen sind. Der stationäre Zustand p_λ genügt somit dem Glansdorff-Prigogine'schen Stabilitätskriterium, wenn alle Eigenwerte von $L[p_\lambda]$ positiv sind, während das Stabilitätskriterium nicht erfüllt ist, wenn ein Eigenwert negativ ist. Unter der Voraussetzung, daß alle nichtkritischen Eigenwerte von $L[p_\lambda]$ positiv sind, ist nach Lemma 2.1 die Anzahl der positiven, bzw. negativen Eigenwerte von $L[p_\lambda]$ gleich der Anzahl der positiven, bzw. negativen Eigenwerte der mxm-Matrix $g^{(2)}(y_\lambda,\lambda) := \partial^2 g(y_\lambda,\lambda)/\partial y \partial y$. Das Glansdorff-Prigogine'sche Stabilitätskriterium kann demnach auch über g formuliert werden: Der zu y_λ assoziierte stationäre Zustand p_λ ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von $g^{(2)}(y_\lambda,\lambda)$ positiv sind und instabil, wenn ein Eigenwert von $g^{(2)}(y_\lambda,\lambda)$ negativ ist. Dieses Stabilitätskriterium ist trivialerweise identisch mit dem Corrollar von Lemm 2.1 und kann auch direkt durch Linearisierung von (6.9) um p_λ abgeleitet werden.

TEIL II:

SEMIKLASSISCHE APPROXIMATION DES FEYNMAN-WEGINTEGRALS IN DER UMGEBUNG EINER KAUSTIK MITTELS KATASTROPHEN

7. WIRKUNGSFUNKTIONAL DER KLASSISCHEN MECHANIK IN EINER UMGEBUNG KONJUGIERTER PUNKTE ALS ENTFALTUNG VON SINGULARITÄTEN

Zusammenfassung: Ziel dieses Kapitels ist es, mit Hilfe von Theorem 2.2 (Kap. 2) eine Darstellung des Wirkungsfunktionals der klassischen Mechanik zu finden, die es gestattet, alle klassischen Wege, d.h. alle Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung, die zwei gegebene Raum-Zeit-Punkte verbinden, aus den stationären Punkten der Entfaltung einer Singularität zu konstruieren und die Kaustiken aus der Bifurkationsmenge dieser Entfaltung zu bestimmen.

7.1 Konjugierte Punkte und Kaustiken

Wir betrachten ein klassisch mechanisches System mit M Freiheitsgraden. q_i $(1 \leq i \leq M)$ seien die verallgemeinerten Koordinaten des Systems, $q:=(q_1,\ldots,q_M)^T$, t sei die Zeit. Mit $P:=(q,t)$ werden Raum-Zeit-Punkte bezeichnet. Die Lagrangefunktion des Systems sei gegeben durch

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M} W_{ij}(t)\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{M} R_i(q)\dot{q}_i - V(q,t) \quad (\dot{} := \frac{d}{dt}) \tag{7.1}$$

mit einer positiv definiten, stetigen und symmetrischen "Massenmatrix" $W(t) = \{W_{ij}(t)\}_{1 \leq i,j \leq M}$. Durch die $R_i(q,t)$ werden äußere Kräfte (z.B. magnetische Felder) berücksichtigt und V(q,t) ist das Potential. Zu gegebenen Anfangs- und Endpunkten $P_1=(q_1,t_1)$, $P_2=(q_2,t_2)$ $(t_1<t_2)$ ist das Wirkungsfunktional $S_{P_1P_2}=S_{P_1P_2}[q(t)]$ auf allen Wegen q(t) definiert, die von P_1 nach P_2 führen $(q(t_i)=q_i,\ i=1,2)$,

$$S_{P_1P_2}[q(t)] := \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t),\dot{q}(t),t)dt. \tag{7.2}$$

Das zeitliche Verhalten des Systems, d.h. die klassischen Wege, sind durch die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \tag{7.3}$$

bestimmt, die aus dem Variationsprinzip $\delta S_{P_1P_2}=0$ folgen. Gibt man Anfangsbedingungen $q(t_1)=q_1$, $\dot{q}(t_1)=\dot{q}_1$ vor, dann ist die Lösung q(t) eindeutig bestimmt für alle Zeiten t. Faßt man jedoch (7.3) als Randwertproblem auf, so kann es zu vorgegebenen Anfangs- und Endpunkten P_1,P_2 mehrere Lösungen von (7.3) geben: Die Eindeutigkeit der Lösungen geht dann verloren. Sei $q(t;t_1,q_1,\dot{q}_1)$ die Lösung des Anfangswertproblems (7.3), d.h. die eindeutige Lösung von (7.3) mit $q(t_1;t_1,q_1,\dot{q}_1)=q_1$, $\dot{q}(t_1;t_1,q_1,\dot{q}_1)=\dot{q}_1$. Die Wege, die P_1 mit P_2 verbinden, sind dann bestimmt durch die Gleichung

$$q(t_2;t_1,q_1,\dot{q}_1) = q_2. \tag{7.4}$$

Falls $\det \partial q(t_2;t_1,q_1,\dot{q}_1)/\partial \dot{q}_1 \neq 0$ ist, kann (7.4) eindeutig nach $\dot{q}_1=\dot{q}_1(P_1,P_2)$ aufgelöst werden und man erhält eindeutige Lösungen $q_c(t;P_1,P_2):=q(t;t_1,q_1,\dot{q}_1(P_1,P_2))$, welche die vorgeschriebenen Randpunkte P_1,P_2 verbinden.

Wir betrachten nun einen festen Anfangspunkt $P_1^o=(q_1^o,t_1^o)$ und einen festen Endpunkt $P_2^o=(q_2^o,t_2^o)$, $t_1^o<t_2^o$, so daß $q_o(t_2^o)=q_2^o$, wobei $q_o(t):=q(t;t_1^o,q_1^o,\dot{q}_1^o)$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\dot{q}_1^o$ ist. Setze $Q_2(t):=\partial q(t;t_1^o,q_1^o,\dot{q}_1^o)/\partial\dot{q}_1\in\mathcal{M}(M,M)$. Wir nehmen an, daß $Q_2(t_2^o)$ einen M'-dimensionalen Kern besitzt, $1\leq M'\leq M$. Dies ist äquivalent dazu, daß die um $q_o(t)$ linearisierte Euler-Lagrange-Gleichung (Jacobi-Gleichung) genau M' linear unabhängige Lösungen $\tilde{q}_j(t)$ $(1\leq j\leq M')$ besitzt mit $\tilde{q}_j(t_1^o)=\tilde{q}_j(t_2^o)=0$ [49]. Insbesondere gilt dann $\det Q_2(t_2^o)=0$, d.h. Gleich. (7.4) ist um (P_1^o,P_2^o) nicht mehr eindeutig nach $\dot{q}_1$ auflösbar: Für (P_1,P_2) nahe (P_1^o,P_2^o) gibt es i.a. mehrere verschiedene Lösungen von (7.3), die P_1 mit P_2 verbinden und für $(P_1,P_2)\longrightarrow(P_1^o,P_2^o)$ in $q_o(t)$ übergehen. P_1^o und P_2^o nennt man konjugierte Punkte der Ordnung M' bzgl. $q_o(t)$, und P_2^o "liegt auf der Kaustik $C(P_1^o)$ relativ zu P_1^o", die als Einhüllende aller Lösungen q(t) von (7.3) mit $q(t_1^o)=q_1^o$ definiert ist [50]:

$$C(P_1^o) := \left\{(q_2,t_2)\;\middle|\; q(t_2;t_1^o,q_1^o,\dot{q}_1)=q_2,\ \det\partial q(t_2;t_1^o,q_1^o,\dot{q}_1)/\partial\dot{q}_1=0\right\}. \tag{7.5}$$

In Fig. 15 sind mehrere Lösungen der Differentialgleichung des anharmonischen Oszillators

$$\ddot{q} + q + q^3 = 0, \quad q\in\mathbb{R} \tag{7.6}$$

abgebildet, die vom Anfangspunkt $P_1^o=(0.35,0)$ ausgehen. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Kaustik relativ zu P_1^o nach einer halben Periode des klassischen Weges $q_o(t)$ $(q_o(0)=0.35,\ \dot{q}_o(0)=0)$ eine Spitze bildet. In Fig. 16 und Fig. 17 sind einige kompliziertere Kaustiken dargestellt.

7.2 Darstellung des Wirkungsfunktionals in einer Umgebung von konjugierten Punkten

Es sei $\hat{q}(t)=\hat{q}(t;P_1,P_2)$ ein beliebiger Weg mit $\hat{q}(t_1)=q_1$, $\hat{q}(t_2)=q_2$. Setzt man $\tilde{q}(t):=q(t)-\hat{q}(t)$ für einen Weg q(t) mit $q(t_i)=q_i$ $(i=1,2)$, so erfüllt $\tilde{q}(t)$ die homogenen Randbedingungen $\tilde{q}(t_1)=\tilde{q}(t_2)=0$ und aus dem Wirkungsfunktional (7.2) wird

$$S_{P_1P_2}[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(\hat{q}(t)+\tilde{q}(t),\dot{\hat{q}}(t)+\dot{\tilde{q}}(t),t)dt =: S_{t_1t_2}[q_1,q_2,\tilde{q}(t)]\ , \tag{7.7}$$

Das Funktional $S_{t_1t_2}$ ist definiert auf allen Wegen $\tilde{q}(t)$ mit $\tilde{q}(t_1)=\tilde{q}(t_2)=0$. Anfangs- und Endorte q_1,q_2 werden als Parameter aufgefaßt. Mit der normierten Zeit $s=(t-t_1)/\Delta t$ $(\Delta t:=t_2-t_1)$, und

$$\hat{u}(s) = \hat{u}(s;P_1,P_2) := \hat{q}(t_1+s\Delta t;P_1,P_2) \tag{7.8a}$$

$$u(s) = \tilde{q}(t_1+s\Delta t) \tag{7.8b}$$

erhält man

$$S_{t_1t_2}[q_1,q_2,q(t)] = S^*[P_1,P_2;u(s)]/\Delta t, \tag{7.9}$$

wobei

$$S^*[P_1,P_2;u(s)] := \int_0^1\left\{\mathcal{L}_0^*(P_1,P_2,s)+\mathcal{L}_1^*(P_1,P_2,u(s),u'(s),s)\right\}ds \quad (':=d/ds) \tag{7.10}$$

mit

$$\mathcal{L}_0^*(P_1,P_2,s) := \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}W_{ij}^*(s,t_1,t_2)\hat{u}_i'(s;P_1,P_2)\hat{u}_j'(s;P_1,P_2), \tag{7.11a}$$

$$\mathfrak{L}_1^*(P_1,P_2,u,u',s) := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M} W_{ij}^*(s,t_1,t_2)u_i'u_j' + \sum_{i=1}^{M} R_i^*(P_1,P_2,u,s)u_i' - V^*(P_1,P_2,u,s), \quad (7.11b)$$

und

$$W_{ij}^*(s,t_1,t_2) := W_{ij}(t_1+s\Delta t) \quad (7.12a)$$

$$R_i^*(P_1,P_2,u,s) := R_i(\hat{u}(s)+u,t_1+s\Delta t)\Delta t + \sum_{j=1}^{M} W_{ij}^*(s,t_1,t_2)\hat{u}_j(s) \quad (7.12b)$$

$$V^*(P_1,P_2,u,s) := -\Delta t\sum_{i=1}^{M} R_i(\hat{u}(s)+u,t_1+s\Delta t)\hat{u}_i'(s) + (\Delta t)^2 V(\hat{u}(s)+u,t_1+s\Delta t). \quad (7.12c)$$

S^*ist definiert auf Funktionen $u(s)=(u_1(s),\ldots,u_M(s))^T$ $(0\leq s\leq 1)$ mit homogenen Randbedingungen $u(0)=u(1)=0$. Die Raum-Zeit-Punkte P_1,P_2 werden als Parameter aufgefaßt.

Wir interessieren uns hauptsächlich für (P_1,P_2) in einer Umgebung der bzgl. $q_0(t)$ konjugierten Punkte P_1^0,P_2^0. Dort kann für $\hat{q}(t;P_1,P_2)$ keine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung gewählt werden, da (7.4) i.a. nicht eindeutig nach $\dot{q}_1$ auflösbar ist. Es wird deshalb für $\hat{q}$ ein Weg gewählt, der für $(P_1,P_2)=(P_1^0,P_2^0)$ mit $q_0(t)$ übereinstimmt, $\hat{q}(t;P_1^0,P_2^0)=q_0(t)$, z.B.

$$\hat{q}(t;P_1,P_2) = q_0(t) - q_0(t_1) + q_1 + (t-t_1)(q_2-q_0(t_2)+q_0(t_1)-q_1)/\Delta t. \quad (7.13)$$

Zu gegebenem (P_1,P_2) sind alle Lösungen $q_{P_1P_2}(t)$ von (7.3), die von P_1 nach P_2 führen, eindeutig bestimmt aus den Lösungen $u_{P_1P_2}(s)$ mit $u_{P_1P_2}(0)=u_{P_1P_2}(1)=0$ der zu S^* an der Stelle (P_1,P_2) assoziierten Euler-Lagrange-Gleichung

$$(d/ds)\,\partial\mathfrak{L}^*/\partial u' - \partial\mathfrak{L}^*/\partial u = 0, \quad (7.3a)$$

vermöge

$$q_{P_1P_2}(t) = \hat{q}(t;P_1,P_2) + u_{P_1P_2}((t-t_1)/\Delta t). \quad (7.14)$$

Insbesondere ist $u=0$ für $(P_1,P_2)=(P_1^0,P_2^0)$ eine Lösung von (7.3a), diese bestimmt den klassischen Weg $q_0(t)$.

Differenzierbarkeitseigenschaften von S^*:

Mit Γ wird die kompakte Menge $\Gamma := \{(q_0(t),t) \mid t_1^0\leq t\leq t_2^0\} \subset \mathbb{R}^{M+1}$ bezeichnet. Wir nehmen an, daß es eine offene Menge $\Omega_1\subset\mathbb{R}^M$, sowie ein $\bar{t}_1<t_1^0$ und ein $\bar{t}_2>t_2^0$ gibt mit $\Gamma\subset\Omega_1\times]\bar{t}_1,\bar{t}_2[=:\Omega_2\subset\mathbb{R}^{M+1}$, und daß die Funktionen $W_{ij}(t)$, $R_i(q,t)$, $V(q,t)$ $\mathcal{C}^\infty$ sind auf Ω_2. Dann ist $q_0(t)$ ebenfalls $\mathcal{C}^\infty$ für $t\in]\bar{t}_1,\bar{t}_2[$. Setzt man daher $\mathfrak{b} := (P_1 - P_1^0,\ P_2 - P_2^0)$, so kann für $\hat{q}(t,\mathfrak{b}):=\hat{q}(t;P_1,P_2)$ ein Weg gewählt werden, der $\mathcal{C}^\infty$ ist auf $[\hat{t}_1,\hat{t}_2]\times\Omega_3$ mit Zeiten $\bar{t}_1\leq\hat{t}_1<t_1^0$, $\bar{t}_2\geq\hat{t}_2>t_2^0$ und einer offenen Nullumgebung $\Omega_3\subset\mathbb{R}^{2M+2}$, und für den $\hat{\Omega}_1:=\{\hat{q}(t,\mathfrak{b})\,|\,t\in]\hat{t}_1,\hat{t}_2[,\ \mathfrak{b}\in\Omega_3\}\subset\Omega_1$ gilt mit $0<\operatorname{dis}(\hat{\Omega}_1,\partial\Omega_1)\leq\infty$, wobei $\partial\Omega_1$ der Rand von Ω_1 ist und

$$\operatorname{dis}(\hat{\Omega}_1,\partial\Omega_1) := \inf\{|q-\bar{q}| \mid q\in\hat{\Omega}_1,\ \bar{q}\in\partial\Omega_1\} \quad \text{falls } \partial\Omega_1\neq\emptyset,$$

$$\operatorname{dis}(\hat{\Omega}_1,\partial\Omega_1) := \infty \quad \text{falls } \partial\Omega_1=\emptyset, \text{ bzw. } \Omega_1=\mathbb{R}^M.$$

Daraus folgt, daß die Funktionen $\mathfrak{L}_0^*(\mathfrak{b},s):=\mathfrak{L}_0^*(P_1,P_2,s)$, $R_i^*(\mathfrak{b},u,s):=R_i^*(P_1,P_2,u,s)$, $V^*(\mathfrak{b},u,s):=V^*(P_1,P_2,u,s)$ und $W_{ij}^*(\mathfrak{b}_1,s):=W_{ij}^*(s;t_1,t_2)$ $(\mathfrak{b}_1:=(t_1-t_1^0,t_2-t_2^0))$ $\mathcal{C}^\infty$ sind auf $\Omega_3\times\Omega_4\times[0,1]$ mit einer offenen Nullumgebung $\Omega_4\subset\mathbb{R}^M$.

Mit H wird der Sobolew'sche Hilbertraum $H:=\overset{\circ}{W}{}_2^{1,M}(]0,1[)$ bezeichnet, d.h. der Raum aller $u=u(s)=(u_1(s),\ldots,u_M(s))^T$ mit stetigen $u_j(s)$, $s\in[0,1]$, $u_j(0)=u_j(1)=0$, deren verallgemeinerte Ableitungen quadratintegrabel sind. Setze $B:=(C([0,1]))^M$, $H_0:=(L_2(]0,1[))^M$ und $(.,.)_{H_0}=:(.,.)$, d.h.

$$(v_1,v_2) = \int_0^1 v_1^T(s)v_2(s)ds,\quad v_i(s)=(v_{i1}(s),\ldots,v_{iM}(s))^T\in H_0,\quad i=1,2.$$

Es sei $d:=dis(\partial\Omega_4,0)$, also $0<d\leq\infty$. Für jedes $v=v(s)\in B$ mit $\|v\|_B<d$ ist $v(s)\in\Omega_4$ für alle $s\in[0,1]$. Bezeichne mit Ω_5 die offene Kugel in B um 0 mit Radius d. Aus den Differenzierbarkeitseigenschaften von $\mathcal{L}_0^*$, R_i^*, V^*, W_{ij}^* auf $\Omega_3\times\Omega_4\times[0,1]$ folgt, daß das Funktional

$$\hat{S}^*:\Omega_3\times\Omega_5\times H_0\longrightarrow\mathbb{R},\quad \hat{S}^*(\mathfrak{b},v,w) := \int_0^1\Big\{\mathcal{L}_0^*(\mathfrak{b},s)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M W_{ij}^*(\mathfrak{b}_1,s)w_i(s)w_j(s) + \sum_{i=1}^M R_i^*(\mathfrak{b},v(s),s)w_i(s) - V^*(\mathfrak{b},v(s),s)\Big\}ds\ ,$$

$(v=v(s)\in B,\ w=w(s)\in H_0)$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Funktional ist. Da nach dem Sobolew-Lemma die Einbettung $H\subset B$ stetig ist, gibt es eine positive Konstante c, so daß $\|u\|_B\leq c\|u\|_H$ für alle $u\in H$. Bezeichnet daher Ω die offene Kugel in H um 0 mit Radius d/c, so ist $\|u\|_B\leq d$ für alle $u\in\Omega\subset H$. Die Abbildung $u\longrightarrow(u,u')$, $u\in\Omega\subset H$, ist somit eine lineare und stetige Abbildung von Ω nach $\Omega_5\times H_0$ und daraus folgt bereits das folgende Lemma:

Lemma 7.1. Das Funktional $S^*[\mathfrak{b},u(s)]:=S^*[P_1,P_2;u(s)]$ ist ein $\mathcal{C}^\infty$-Funktional für $(\mathfrak{b},u)\in\Omega_3\times\Omega$ $(u=u(s)\in\Omega\subset H)$.

Darstellung von S^* durch die Entfaltung einer Singularität:
Setze $S_1^*[\mathfrak{b},u(s)]:=S^*[\mathfrak{b},u(s)]-S^*[\mathfrak{b},0]$, d.h.

$$S_1^*[\mathfrak{b},u(s)] = \int_0^1\mathcal{L}_1^*(\mathfrak{b},u(s),u'(s),s)ds + \int_0^1 V^*(\mathfrak{b},0,s)ds.$$

S_1^* wird als $\mathcal{C}^\infty$-Funktional von $\Omega_3\times\Omega\subset\mathbb{R}^{2M+2}\times H$ nach $\mathbb{R}$ aufgefaßt. Dann gilt $S_1^*[\mathfrak{b},0]=0$ und $D_HS_1^*[0,0]=0$. Die zweite Ableitung von S_1^* bzgl. H ist an der Stelle $\mathfrak{b}=0$, $u=0$ gegeben durch

$$B_0(v,w) := D_H^2S_1^*[0,0]vw = \int_0^1\Big\{v'^T(s)W_0^*(s)w'(s)+v'^T(s)R_0^*(s)w(s)+ w'^T(s)R_0^*(s)v(s)-v^T(s)V_0^*(s)w(s)\Big\}ds\ , \tag{7.15}$$

wobei $v,w\in H$ und die MxM-Matritzen W_0^*,R_0^*,V_0^* definiert sind durch $W_{0,ij}^*(s):=W_{ij}^*(0,s)$, $R_{0,ij}^*(s):=\partial R_i^*(0,0,s)/\partial u_j$, $V_{0,ij}^*(s):=\partial^2V(0,0,s)/\partial u_i\partial u_j$. Partielle Integration in (7.15) ergibt $B_0(v,w)=(L_0v,w)$ mit dem linearen und selbstadjungierten Differentialoperator L_0,

$$L_0 := -\frac{d}{ds}(W_0^*(s)\frac{d}{ds}+R_0^*(s)) + R_0^{*T}(s)\frac{d}{ds} - V_0^*(s)\ . \tag{7.16}$$

L_0 ist stark elliptisch und besitzt somit eine abzählbare Sequenz von (reellen) Eigenwerten $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, von denen höchstens endlich viele negativ sind, mit Eigen-

funktionen $v_k=v_k(s)=(v_{k1}(s),\dots,v_{kM}(s))^T$, $v_k(0)=v_k(1)=0$, die eine Orthonormalbasis in H_o bilden und vollständig in H sind. Da die Matritzen W_o^*, R_o^*, V_o^* $\mathcal{C}^\infty$ sind auf $[0,1]$, sind die $v_k(s)$ ebenfalls $\mathcal{C}^\infty$ [32]. Da außerdem vorausgesetzt wurde, daß es zu der um $q_o(t)$ linearisierten Euler-Lagrange-Gleichung genau M' ($1\leq M'\leq M$) linear unabhängige Lösungen $\tilde{q}_k(t)$ mit $\tilde{q}_k(t_1^o)=\tilde{q}_k(t_2^o)=0$ ($1\leq k\leq M'$) gibt, gilt $\lambda_j=0$ für $1\leq j\leq M'$ und $\lambda_j\neq 0$ für $j\geq M'+1$. Nach Kap. 4.1(1) gibt es eine positive Konstante $\varkappa_0$, so daß die symmetrische Bilinearform $B_1:HxH\longrightarrow\mathbb{R}$, $B_1(v,w):=B_o(v,w)+\varkappa_0(v,w)$ $(v,w\in H)$ ein zu $(.,.)_H$ äquivalentes Skalarprodukt ist ($-\varkappa_0$ ist kleiner als der kleinste Eigenwert von L_o). Nach [27,33] ist L_o ein stetiger Operator und $L_1:=L_o+\varkappa_0$ ein isometrischer Isomorphismus von H nach H^*, dem topologischen Dualraum von H, der aus allen $v=v(s)\in(D'(]0,1[))^M$ mit $v(s)=u''(s)$, $u=u(s)\in H$, besteht. $G_1:H^*\longrightarrow H$ sei der zu L_1 inverse Operator, $G_1=L_1^{-1}$. Für die Bilinearform B_o ergibt sich, daß

$$B_o(v,w) = (L_ov,w) = (L_ov,G_1L_1w) = (G_1L_ov,L_1w) = B_1(G_1L_ov,w),\quad v,w\in H.$$

Der bzgl. des Skalarprodukts B_1 zu der zweiten Ableitung von S_1^* korrespondierende Operator $A:H\to H$, definiert durch $B_o(v,w)=B_1(Av,w)$, ist somit gegeben durch $A=G_1L_o$. A ist nach Kap. 4.1(1) Fredholmoperator mit Index Null und der Kern von A (bzw. L_o) wird von $\{v_1(s),\dots,v_{M'}(s)\}$ aufgespannt. Wir setzen $N:=\mathrm{Ker}A$ und identifizieren jedes $v\in N$ mit seinen Komponenten $y:=(y_1,\dots,y_{M'})$ bzgl. der Basis $\{v_1,\dots,v_{M'}\}$, d.h. $y_i:=(v,v_i)$ $(1\leq i\leq M')$. Das orthogonale Komplement $E:=N^\perp$ von N in H besteht aus allen $w=w(s)$ mit

$$w(s) = \sum_{j=M'+1}^{\infty} a_j v_j(s),\quad a_j:=(w,v_j),$$

für die die Summe in der Norm von H konvergiert. Nach Theorem 2.2 gibt es lokal eine eindeutige Funktion $h(y,\xi)=h(y,\xi;s)\in E$ mit $h(0,0;s)=\partial h(0,0;s)/\partial y_i=0$ $(1\leq i\leq M')$, so daß

$$D_H S_1^*[\xi,v_o(y;s)+h(y,\xi;s)]v_j = 0 \text{ für } j\geq M'+1, \tag{7.17}$$

wobei $v_o(y;s):=\sum_{j=1}^{M'}y_jv_j(s)\in N$. In einer Umgebung von $(0,0)\in\mathbb{R}^{2M+2}xH$ gilt nach dem Beweis von Theorem 2.2, daß

$$S_1^*[\xi,v_o(y;s)+h(y,\xi;s)+w(s)] = g(y,\xi) + B(y,w,\xi)ww/2 \quad (w=w(s)\in E), \tag{7.18}$$

wobei

$$g(y,\xi) := S_1^*[\xi,v_o(y;s)+h(y,\xi;s)], \tag{7.19}$$

und $B(y,w,\xi)$ für jedes (y,w,ξ) in einer Umgebung von $(0,0,0)\in\mathbb{R}^{M'}xEx\mathbb{R}^{2M+2}$ eine stetige, symmetrische und reguläre Bilinearform auf E ist,

$$\tfrac{1}{2}B(y,w,\xi)w_1w_2 := \int_0^1 d\theta(1-\theta)D_E^2S_1^*[\xi,v_o(y;s)+h(y,\xi;s)+\theta w(s)]w_1w_2 \quad (w,w_1,w_2\in E). \tag{7.20}$$

Bezeichne mit $\hat{l}_2^1$, $\hat{l}_2$, die reellen Folgenräume

$$\hat{l}_2^1 := \{a=(a_{M'+1},a_{M'+2},\dots) \mid a_j\in\mathbb{R},\ \sum_{j=M'+1}^{\infty}(\lambda_j+\varkappa_0)a_j^2<\infty\},$$

$$\hat{l}_2 := \{a=(a_{M'+1},a_{M'+2},\dots) \mid a_j\in\mathbb{R},\ \sum_{j=M'+1}^{\infty}a_j^2<\infty\}.$$

Mit dem Skalarprodukt

$(a,b)_{\hat{l}_2^1} := \sum_{j=M'+1}^{\infty}(\lambda_j+\chi_0)a_jb_j$ $(a,b\in\hat{l}_2^1)$, bzw. $(a,b)_{\hat{l}_2} := \sum_{j=M'+1}^{\infty}a_jb_j$ $(a,b\in\hat{l}_2)$, wird $\hat{l}_2^1$, bzw. $\hat{l}_2$ zum Hilbertraum und $\hat{l}_2^1$ ist dicht in $\hat{l}_2$. Die Abbildung $E\to\hat{l}_2^1$, $w\to a$, $a_j:=(w,v_j)$, ist ein isometrischer Isomorphismus von E mit dem Skalarprodukt B_1 nach $\hat{l}_2^1$, es kann somit jedes $w\in E$ mit seinen Komponenten bzgl. der Basis $\{v_k\}_{k\geq M'+1}$ identifiziert werden. Setzt man daher

$$S^*(\varepsilon,y,a) := S^*[\varepsilon,v_0(y;s)+\sum_{j=M'+1}^{\infty}a_jv_j(s)] \tag{7.21a}$$

$$S_1^*(\varepsilon,y,a) := S_1^*[\varepsilon,v_0(y;s)+\sum_{j=M'+1}^{\infty}a_jv_j(s)] \tag{7.21b}$$

$$A_{ij}(\varepsilon,y,a) := \partial^2S_1^*(\varepsilon,y,a)/\partial a_i\partial a_j,\ i,j\geq M'+1 \tag{7.21c}$$

$$h_j(y,\varepsilon) := (h(y,\varepsilon),v_j),\ j\geq M'+1 \tag{7.21d}$$

$$\tilde{h}(y,\varepsilon) := (h_{M'+1}(y,\varepsilon),h_{M'+2}(y,\varepsilon),\ldots)\in\hat{l}_2^1 \tag{7.21e}$$

$$\hat{B}_{ij}(\varepsilon,y,a) := 2\int_0^1 d\theta(1-\theta)A_{ij}(\varepsilon,y,\theta a+\tilde{h}(y,\varepsilon)), \tag{7.21f}$$

wobei $a=(a_{M'+1},a_{M'+2},\ldots)\in\hat{l}_2^1$, so wird mit (7.18) und (7.20)

$$S_1^*(\varepsilon,y,a+\tilde{h}(y,\varepsilon)) = g(y,\varepsilon) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=M'+1}^{\infty}\hat{B}_{ij}(\varepsilon,y,a)a_ia_j, \tag{7.22}$$

bzw.

$$S^*(\varepsilon,y,a+\tilde{h}(y,\varepsilon)) = S^*[\varepsilon,0] + g(y,\varepsilon) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=M'+1}^{\infty}\hat{B}_{ij}(\varepsilon,y,a)a_ia_j. \tag{7.23}$$

Zu der Matrix $\{\hat{B}_{ij}(\varepsilon,y,a)\}_{i,j\geq M'+1}$ korrespondiert ein linearer und stetiger Operator $\hat{B}(\varepsilon,y,a):\hat{l}_2^1\longrightarrow\hat{l}_2^{1*}$, $(\hat{B}(\varepsilon,y,a)b)_i:=\sum_{j=M'+1}^{\infty}\hat{B}_{ij}(\varepsilon,y,a)b_j$, $b\in\hat{l}_2^1$, wobei $\hat{l}_2^{1*}$ der Dualraum von $\hat{l}_2^1$ ist, d.h. der Hilbertraum aller Folgen $a=(a_{M'+1},a_{M'+2},\ldots)$, $a_j\in\mathbb{R}$, mit $\sum_{j=M'+1}^{\infty}(\lambda_j+\chi_0)^{-1}a_j^2<\infty$. Das Skalarprodukt in $\hat{l}_2^{1*}$ ist gegeben durch

$$(a,b)_{\hat{l}_2^{1*}} = \sum_{j=M'+1}^{\infty}(\lambda_j+\chi_0)^{-1}a_jb_j\ (a,b\in\hat{l}_2^{1*}),$$

und es gilt

$$(a,b)_{\hat{l}_2^1\times\hat{l}_2^{1*}} = (a,b)_{\hat{l}_2}\ (a\in\hat{l}_2^1,\ b\in\hat{l}_2^{1*}).$$

Die Abbildung $(\varepsilon,y,a)\to\hat{B}(\varepsilon,y,a)\in\mathcal{L}(\hat{l}_2^1,\hat{l}_2^{1*})$ ist $\mathcal{C}^\infty$ und $\hat{B}(\varepsilon,y,a)$ ist lokal um $(\varepsilon,y,a)=(0,0,0)$ invertierbar. Insbesondere ist daher jedes $\hat{B}_{ij}(\varepsilon,y,a)$ beliebig oft stetig differenzierbar.

Die $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $g(y,\varepsilon)$ ist nach Theorem 2.2 vollständig entartet,

$$g(0,0) = \partial g(0,0)/\partial y_i = \partial^2 g(0,0)/\partial y_i\partial y_j = 0,\ 1\leq i,j\leq M',$$

und nach Kap. 2 (Glgn. (2.7), (2.8)) ist zu gegebenem ε jede Lösung $u_\varepsilon(s)$ der Euler-Lagrange-Gleichung (7.3a) mit $u_\varepsilon(0)=u_\varepsilon(1)=0$ eindeutig bestimmt aus den Lösungen $y_\varepsilon=(y_{1\varepsilon},\ldots,y_{M'\varepsilon})$ des Gleichungssystems

$$\nabla_y g(y,\varepsilon) = 0, \tag{7.24}$$

vermöge

$$u_{\mathfrak{E}}(s) = v_0(y_{\mathfrak{E}};s) + h(y_{\mathfrak{E}},\mathfrak{E};s). \tag{7.25}$$

Daraus folgt, daß zu gegebenen Randpunkten P_1,P_2 jede Lösung $q_{P_1P_2}(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichung (7.3) mit $q_{P_1P_2}(t_i)=q_i$ $(i=1,2)$ eindeutig bestimmt ist aus einer Lösung $y_{\mathfrak{E}}$ von (7.24):

$$q_{P_1P_2}(t) = \hat{q}(t;P_1,P_2) + \sum_{j=1}^{M'} y_{j\mathfrak{E}} v_j((t-t_1)/\Delta t) + h(y_{\mathfrak{E}},\mathfrak{E};(t-t_1)/\Delta t). \tag{7.26}$$

Fixiert man den Anfangspunkt $P_1=\bar{P}_1$ und variiert nur den Endpunkt P_2, so ist die Kaustik relativ zu $\bar{P}_1$ durch die Mannigfaltigkeit

$$C(\bar{P}_1) := \left\{P_2 \mid \nabla_y g(y,\mathfrak{E})=0,\ \det\partial^2 g(y,\mathfrak{E})/\partial y\partial y=0;\ \mathfrak{E}:=(\bar{P}_1-P_1^0,P_2-P_2^0)\right\}$$

bestimmt. Die Kaustik kann somit als eine Katastrophen- oder Bifurkationsmannigfaltigkeit im Sinne von Thom [1] verstanden werden. Ein ähnliches Resultat wurde von DeWitt-Morette [50] erzielt, die mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Gleichung zeigte, daß Kaustiken mit Katastrophenmannigfaltigkeiten übereinstimmen, ohne jedoch die Existenz von g zu beweisen.

Wir nehmen an, daß $g_0(y):=g(y,0)$ endlich bestimmt ist, d.h. $\operatorname{codim} g_0=:r<\infty$ (vgl. Kap. 1). (Damit dies gilt, muß die Euler-Lagrange-Gleichung (7.3) nichtlinear sein, denn im linearen Fall - die R_i sind dann linear und V ist quadratisch in q - läßt sich $S_1^*[\mathfrak{E},u(s)]$, $u=u(s)\in H$, durch eine Bilinearform $B(\mathfrak{E}):HxH\to\mathbb{R}$ darstellen, $S_1^*[\mathfrak{E},u(s)]=B(\mathfrak{E})u^2/2$, $u\in H$, mit $B(0)v_iv_j=0$ für $1\leq i\leq M'$, $1\leq j\leq\infty$, woraus sofort $h(y,0;s)=0$ und $S_1^*[0,v_0(y;s)]=g_0(y)=0$ folgt, d.h. g_0 ist nicht endlich bestimmt.) Nach der Theorie der Entfaltungen von Singularitäten (Kap. 1.2) gibt es dann Multiindices $l_j=(l_1^j,\ldots,l_{M'}^j)$, $1\leq j\leq r$, $l_j^k\in\mathbb{N}_0$, $|l_j|\geq 1$, sowie Funktionen $d(\mathfrak{E})=(d_1(\mathfrak{E}),\ldots,d_r(\mathfrak{E}))$ mit $d_j(0)=0$ und Funktionen $X(y,\mathfrak{E})=(X_1(y,\mathfrak{E}),\ldots,X_{M'}(y,\mathfrak{E}))$ mit $\det\partial X/\partial y\neq 0$, so daß g die folgende Darstellung besitzt:

$$g(y,\mathfrak{E}) = e(\mathfrak{E}) + f(x=X(y,\mathfrak{E}),d=d(\mathfrak{E})), \tag{7.27}$$

wobei

$$f(x,d) := \sum_{j=1}^{r} d_j x^{l_j} + f_0(x) \quad (x=(x_1,\ldots,x_{M'})\in\mathbb{R}^{M'}), \tag{7.28}$$

$$e(\mathfrak{E}) := g(0,\mathfrak{E}) - f(X(\mathfrak{E},0),d(\mathfrak{E})). \tag{7.29}$$

Die zu g_0 äquivalente Singularität f_0 ist ein Polynom in x von höherer Ordnung als zwei und f ist eine universelle Entfaltung von f_0, die "Katastrophenpolynom" genannt wird. In Kap. 8 wird mit Hilfe von (7.23) und (7.27) eine nichtdivergierende semiklassische Approximationsformel für den Feynmanpropagator in einer Umgebung konjugierter Punkte abgeleitet.

7.3 Beispiel: Der anharmonische Oszillator

Wir betrachten als Beispiel die Lagrangefunktion des anharmonischen Oszillators,

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) := \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2 - \frac{\gamma}{4}q^4, \quad m,k,\gamma>0, \tag{7.30}$$

mit der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\ddot{q} + \omega^2 q + q^3/m = 0, \quad \omega^2 := k/m. \tag{7.31}$$

Die Linearisierung von (7.31) um die triviale Lösung $q_0(t)=0$ führt auf die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators,

$$\ddot{\tilde{q}} + \omega^2\tilde{q} = 0. \tag{7.32}$$

$\tilde{q}(t,t_1) := (1/\omega)\sin\omega(t-t_1)$ ist die eindeutige Lösung von (7.32) mit Anfangsbedingung $\tilde{q}(t_1)=0$, $\dot{\tilde{q}}(t_1)=1$, d.h. zu $P_1^0=(0,t_1^0)$ ist der Punkt $P_2^0=(0,t_2^0)$, $t_2^0-t_1^0=n\pi/\omega$, $n\in\mathbb{N}$, ein konjugierter Punkt bzgl. $q_0(t)$. Wähle für $\hat{q}(t;P_1,P_2)$ den Weg

$$\hat{q}(t;P_1,P_2) := q_1 + (t-t_1)\Delta q/\Delta t, \quad \Delta q := q_2-q_1, \tag{7.33a}$$

bzw.

$$\hat{u}(s;P_1,P_2) = q_1 + s\Delta q. \tag{7.33b}$$

Mit $\bar{\xi} := (q_1,q_2,\Delta\tau)$, $\Delta\tau := \Delta t - n\pi/\omega$, erhält man aus (7.33) und (7.10)-(7.12) für S^*:

$$S^* = S^*[\bar{\xi},u(s)] = S^*[\bar{\xi},0] + S_1^*[\bar{\xi},u(s)], \tag{7.34}$$

wobei

$$S^*[\bar{\xi};0]/m = \frac{1}{2}(\Delta q)^2 - \frac{1}{6}(\omega\Delta t)^2(q_1^2+q_1q_2+q_2^2) - \frac{(\Delta t)^2\gamma}{4m}\int_0^1 (q_1+s\Delta q)^4 ds, \tag{7.35a}$$

$$S_1^*[\bar{\xi},u(s)]/m = \int_0^1\Big\{\frac{1}{2}(u')^2 + \Delta q u' - \frac{1}{2}(\omega\Delta t)^2(2(q_1+s\Delta q)u+u^2) - \gamma(\Delta t)^2((q_1+s\Delta q+u)^4-(q_1+s\Delta q)^4)/4m\Big\}ds. \tag{7.35b}$$

An der Stelle $q_1=q_2=0$, $u(s)=0$, verschwindet die erste Ableitung von S_1^* bzgl. $u=u(s)\in H$ und für die zweite Ableitung ergibt sich $D_H^2 S_1^*[0,0]v^2 = (L(\Delta t)v,v)$ $(v=v(s)\in H)$ mit dem Differentialoperator $L(\Delta t) = -d^2/ds^2 - (\omega\Delta t)^2$. Die Eigenwerte von $L(\Delta t)$ sind $\lambda_j=(j\pi)^2-(\omega\Delta t)^2$ mit Eigenfunktionen $v_j(s)=\sqrt{2}\sin j\pi s$ $(j\in\mathbb{N})$, d.h. für $\Delta t=\Delta t_0 := n\pi/\omega$ (bzw. $\Delta\tau=0$) gilt $\lambda_n=0$ $(n\in\mathbb{N})$. Gemäß Theorem 2.2 ist zuerst das Gleichungssystem

$$D_H S_1^*\Big[\bar{\xi},yv_n(s)+\sum_{j=1,j\neq n}^{\infty} h_j v_j(s)\Big]v_l = 0, \quad l\in\mathbb{N},\ l\neq n, \tag{7.36}$$

zu lösen. Entwickelt man die Lösungen $h_k=h_k(y,\bar{\xi})$ $(k\in\mathbb{N},\ k\neq n)$ von (7.36) in eine Taylorreihe um $(y,\bar{\xi})=(0,0)$ und setzt diese in (7.36) ein, so erhält man durch Koeffizientenvergleich für die h_k:

$$h_k(y,\bar{\xi}) = \sqrt{2}n^2(q_1-(-1)^k q_2)/k\pi(k^2-n^2) - \gamma\delta_{k,3n}y^3/16m\omega^2 + \hat{h}_k(y,\bar{\xi}), \tag{7.37}$$

wobei $\hat{h}_k$ alle höheren Terme der Taylorentwicklung von h_k enthält. Einsetzen von (7.37) in

$$g(y,\bar{\xi}) = S_1^*\Big[\bar{\xi},yv_n+\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty} h_k(y,\bar{\xi})v_k(s)\Big] \tag{7.38}$$

ergibt

$$g(y,\vec{\varepsilon})/m = \frac{n^2\pi^2}{6}(q_1^2+q_1q_2+q_2^2) - \frac{5}{4}(q_1-(-1)^n q_2)^2 - \frac{1}{2}(\Delta q)^2 - n\pi\omega\Delta\tau y^2$$
$$-\sqrt{2}n\pi y(q_1-(-1)^n q_2)(1+\frac{\gamma y^2}{48m\omega^2}) - \frac{3\gamma n^2\pi^2}{8m\omega^2}y^4 - (\frac{\gamma n\pi}{8m\omega^2})^2 y^6 + \tilde{g}(y,\vec{\varepsilon}), \tag{7.39}$$

wobei $\tilde{g}$ alle Terme höherer Ordnung enthält. $g_0(y):=g(y,0)$ ist äquivalent zu der Singularität $f_0(x)=-x^4/4$. Da außerdem $g(y,\vec{\varepsilon})$ eine verselle Entfaltung von g_0 ist, folgt, daß

$$g(y,\vec{\varepsilon}) = e(\vec{\varepsilon}) + f(x=X(y,\vec{\varepsilon}),d_1=d_1(\vec{\varepsilon}),d_2=d_2(\vec{\varepsilon})), \tag{7.40}$$

wobei f das Polynom der cusp-Katastrophe ist,

$$f(x,d_1,d_2) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}d_2x^2 - d_1x. \tag{7.41}$$

Durch eine Störungsrechnung ergibt sich

$$e(\vec{\varepsilon})+S^*[\vec{\varepsilon},0] = -\frac{89m}{72}(q_1-(-1)^n q_2)^2 + \tilde{e}(\vec{\varepsilon}) \tag{7.42a}$$

$$X = (\frac{3\gamma n^2\pi^2}{2\omega^2})^{1/4}\left\{\frac{\sqrt{2}}{144n\pi}(q_1-(-1)^n q_2)+y(1+\frac{\gamma}{96m\omega^2}y^2)\right\} + \tilde{X}(y,\vec{\varepsilon}) \tag{7.42b}$$

$$d_1 = \sqrt{2}m(\frac{2\omega^2 n^2\pi^2}{3\gamma})^{1/4}(q_1-(-1)^n q_2) + \tilde{d}_1(\vec{\varepsilon}) \tag{7.42c}$$

$$d_2 = 2m\omega^2(\frac{2}{3\gamma})^{1/2}\Delta\tau + \tilde{d}_2(\vec{\varepsilon}), \tag{7.42d}$$

wobei $\tilde{e}$, $\tilde{X}$, $\tilde{d}_1$, $\tilde{d}_2$ Terme höherer Ordnung enthalten. Die Bifurkationsmenge von f, bzw. g, ist gegeben durch $\partial f/\partial x=\partial^2 f/\partial x^2=0$, d.h. durch

$$27d_1^2 + 4d_2^3 = 0. \tag{7.43}$$

Mit (7.43) erhält man lokal um $P_2^0=(0,t_2^0)$ die Spitze einer Kaustik relativ zu dem Anfangspunkt $P_1^0=(0,t_1^0)$, $t_2^0 - t_1^0 = n\pi/\omega$, zu

$$q_2(t_2) = \pm\left\{\frac{4}{9}(2m\omega^5/n\pi\gamma)^{1/2}(t_2^0-t_2)^{3/2} + o((t_2^0-t_2)^{3/2})\right\}, \quad t_2 \lesseqgtr t_2^0. \tag{7.44}$$

Die triviale Lösung durchläuft somit in $P_2^0=(0,t_2^0)$ die Spitze einer Kaustik relativ zu dem Anfangspunkt $P_1^0=(0,t_1^0)$. Diese Kaustik ist lokal durch (7.44) gegeben und in Fig. 18 für n=1,2 abgebildet. Zu jedem Endpunkt P_2 innerhalb der cusp-Linien gibt es drei klassische Wege, die den Anfangspunkt $P_1^0=(0,0)$ $(t_1^0=0)$ mit P_2 verbinden, während zu Endpunkten außerhalb der cusp-Linien nur ein solcher klassischer Weg existiert.

Figur 15. Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{q} + q + q^3 = 0$$

mit Anfangsbedingungen $q(0)=0.35$, $\dot{q}(0)=0$, ± 0.08, ± 0.16,.... .

Figur 16. Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{q} + q + aq^2 + q^4 = 0$$

mit Anfangsbedingungen $q(0)=q_1=0$, $\dot{q}(0)=\pm 0.05$, ± 0.10,.... für verschiedene Werte von a. Im q_2-t_2-a-Raum ist die Kaustik relativ zu dem Anfangspunkt $(q_1,t_1)=(0,0)$ lokal um $(q_2,t_2,a)=(0,\pi,0)$ äquivalent zur Bifurkationsmenge der swallotail-Katastrophe.

Figur 17. Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{q} + q + bq^2 + aq^3 + q^5 = 0$$

mit Anfangsbedingungen $q(0)=0$, $\dot{q}(0)=\pm 0.05$, ± 0.10,.... für verschiedene Werte von a und b. Im q_2-t_2-b-a-Raum ist die Kaustik relativ zu dem Anfangspunkt $(q_1,t_1)=(0,0)$ lokal um $(q_2,t_2,b,a)=(0,\pi,0,0)$ äquivalent zur Bifurkationsmenge der butterfly-Katastrophe.

Figur 18. Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{q} + q + q^3 = 0$$

mit Anfangsbedingungen $q(0)=0$, $\dot{q}(0)=\pm 0.05$, ± 0.10,.... .

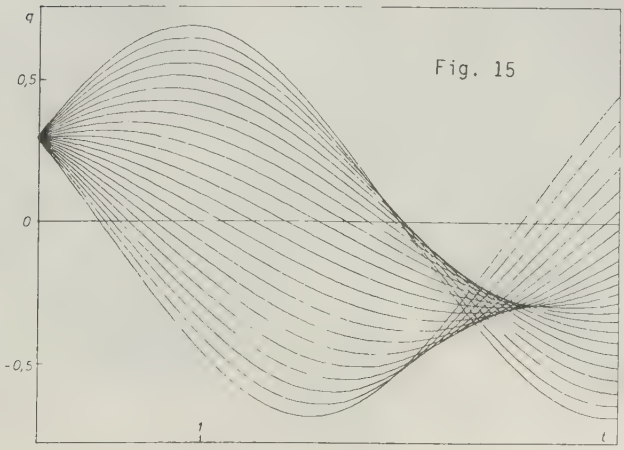


Fig. 15

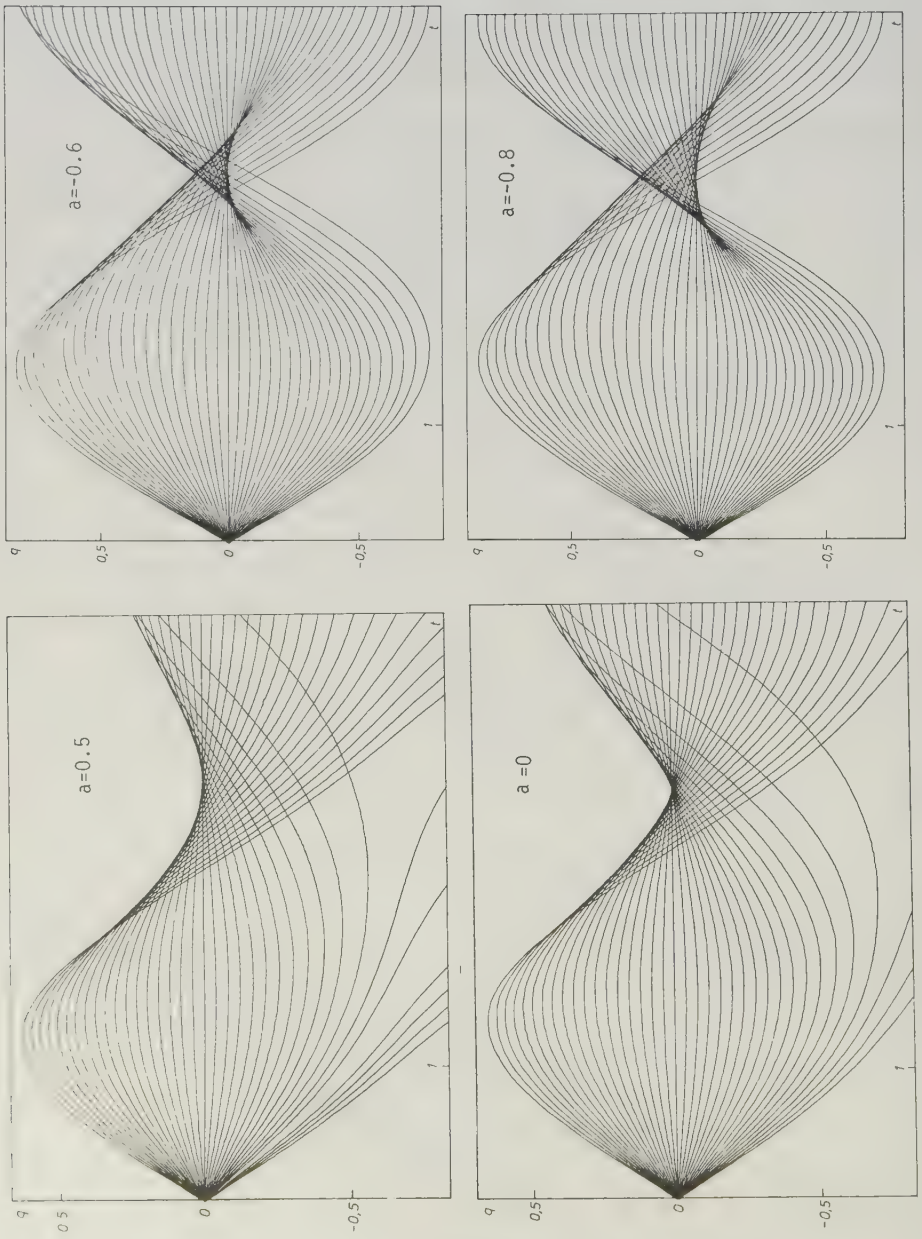


Fig. 16

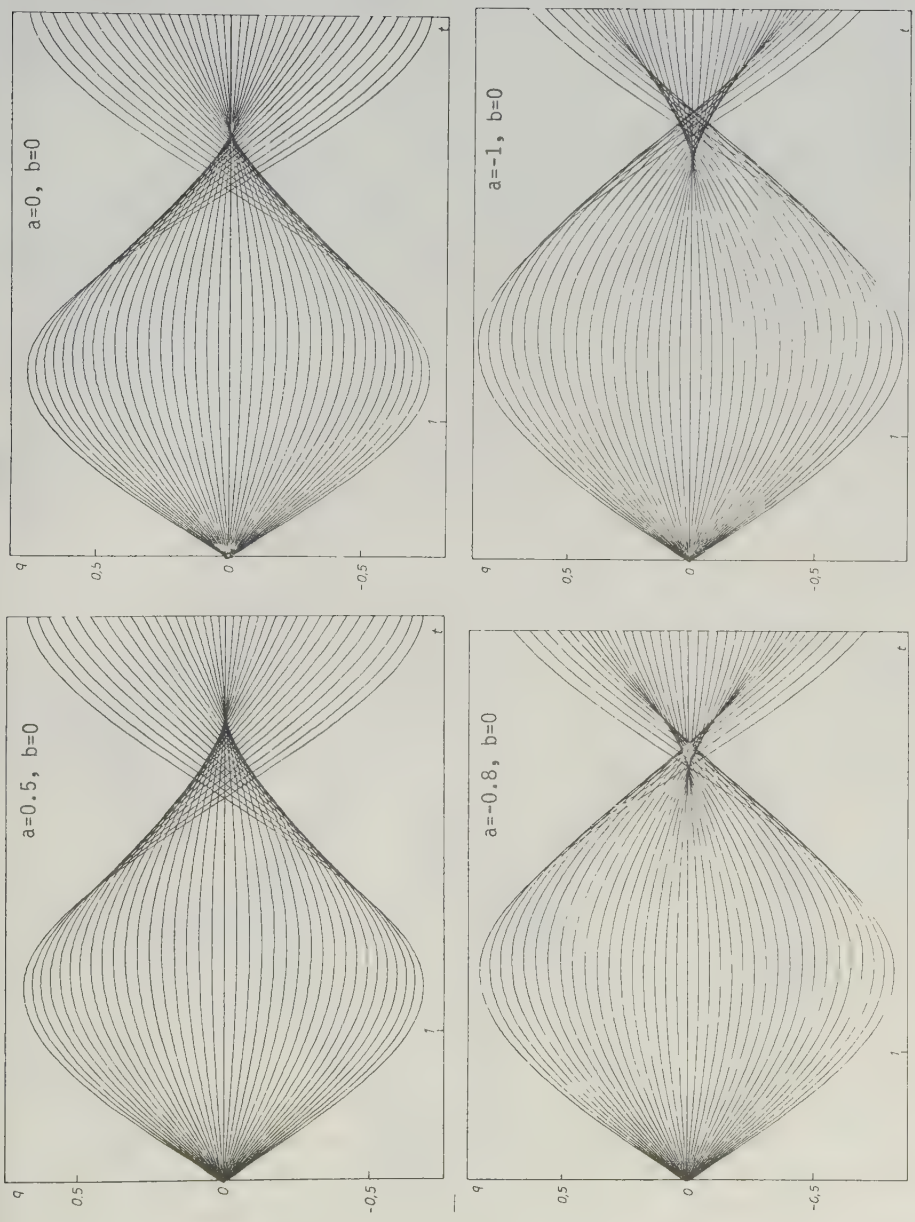


Fig. 17

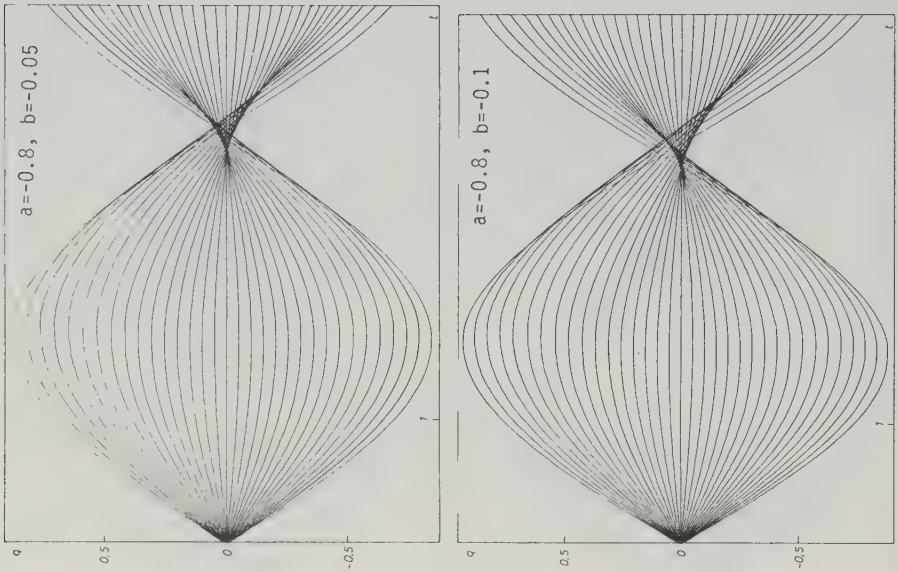


Fig. 17

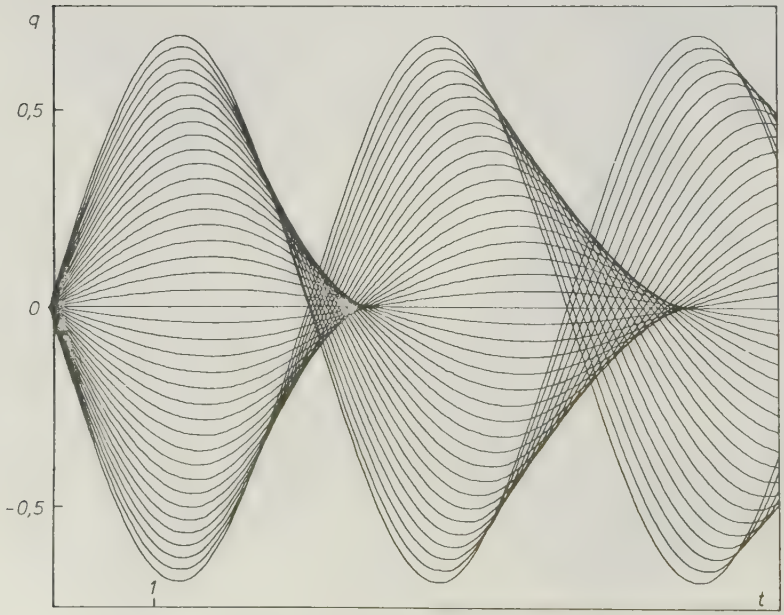


Fig. 18

8. ENDLICHE SEMIKLASSISCHE APPROXIMATION DES FEYNMAN-WEGINTEGRALS IN EINER UMGEBUNG KONJUGIERTER PUNKTE

Zusammenfassung: Das Feynman-Wegintegral [51] für den quantenmechanischen Propagator K,

$$K(P_2,P_1) = \int D_{P_1P_2}[q(t)] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{P_1P_2}[q(t)]\right\} , \qquad (8.1)$$

erwies sich in den letzten Jahren als Ausgangspunkt semiklassischer Approximationen verschiedener Quantenphänomene [52-55]. In Gleich. (8.1) ist $\int D_{P_1P_2}[q(t)]$ Funktionalintegration über alle Wege q(t), die die Raum-Zeit-Punkte P_1,P_2 verbinden. Ziel dieses Kapitels ist es, mit Hilfe der Resultate des letzten Kapitels eine allgemeine semiklassische Approximationsformel für K abzuleiten, die, in Übereinstimmung mit dem Experiment und im Gegensatz zu konventionellen Darstellungen, in und nahe bei konjugierten Punkten endlich bleibt.

Bei der konventionellen semiklassischen Approximation geht man von den klassischen Wegen aus, d.h. von Lösungen $q_c(t)=q_c(t;P_1,P_2)$der Euler-Lagrange-Gleichung, welche die Randbedingungen $q_c(t_i)=q_i$ (i=1,2) erfüllen. Das Wirkungsfunktional $S_{P_1P_2}[q(t)]$ (Gleich. (7.2)) wird approximiert durch

$$S_{P_1P_2}[q(t)] \approx S^c(P_1,P_2) + \frac{1}{2}\delta^2 S^c_{P_1P_2}[\tilde{q}(t)] , \qquad (8.2)$$

wobei $\tilde{q}(t)=q(t)-q_c(t)$ ist. $S^c(P_1,P_2):=S_{P_1P_2}[q_c(t)]$ ist dabei die Hamilton'sche Principalfunktion und $\delta^2 S^c_{P_1P_2}$ die zweite Variation von $S_{P_1P_2}$ entlang des Weges $q_c(t)$, d.h. eine quadratische Form, definiert auf allen Wegen $\tilde{q}(t)$ mit $\tilde{q}(t_1)=\tilde{q}(t_2)=0$. Gutzwiller [56] deduzierte aus (8.1) die folgende Approximationsformel (8.3) ab, die vorher schon von Pauli [57] durch approximative Integration der Schrödinger-Gleichung und von Morette [58] durch Vollständigkeitsargumente hergeleitet wurde:

$$K(P_2,P_1) \approx \sum (2\pi i\hbar)^{-M/2} \left|\det \frac{\partial^2 S^c}{\partial q_1 \partial q_2}\right|^{1/2} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S^c + \text{Phasen}\right\} , \qquad (8.3)$$

wobei über alle verschiedenen klassischen Wege summiert wird, die von P_1 nach P_2 führen (vgl. Berry and Mount [59]).

Jedoch sind in der Approximationsformel (8.3) folgende Komplikationen enthalten: (1) Sie erfordert die Existenz von wenigstens einem klassischen Weg, der von P_1 nach P_2 führt. In klassisch verbotenen Gebieten kann (8.1) nicht durch (8.3) approximiert werden. Um K auch in solchen Gebieten zu approximieren, führten Miller [52] und Koeling und Malifet [53] komplexe klassische Wege ein, die ein komplexes S^c implizieren, dessen Imaginärteil in einem exponentiellen Dämpfungsfaktor für die Wellenamplitude resultiert. (2) Im Gegensatz zu experimentellen Befunden (Intensitäten auf Kaustiken sind nicht unendlich groß) divergiert die Determinante $\det\partial^2 S^c/\partial q_1\partial q_2$, falls $P_1=P_1^o=(q_1^o,t_1^o)$ und $P_2=P_2^o=(q_2^o,t_2^o)$ konjugierte Punkte bzgl. des klassischen Weges $q_c(t;P_1^o,P_2^o)$ sind, d.h. auf Kaustiken wird die Approximations-

formel (8.3) unendlich.

Um das Wegintegral in einer Umgebung von konjugierten Punkten zu approximieren, betrachten wir eine Kaustik, wie sie in Fig. 15 (Kap. 7) dargestellt wird, wobei ein klassischer Weg $q_0(t)$ von $P_1^o=(q_1^o,0)$ nach $P_2^o=(q_2^o,t_2^o)$ führt und P_2^o auf der Spitze der Kaustik relativ zu P_1^o liegt. Schulman [60] machte den Vorschlag, daß in solchen Fällen der Propagator K an der Stelle $P_2=(q_2,t_2^o)$, $P_1=P_1^o$ proportional zu einem verallgemeinerten Airy Integral der Form

$$K(P_2=(q_2,t_2^o),P_1^o) \sim \exp(\tfrac{i}{\hbar}S_{P_1^oP_2^o}[q_0(t)])\int dx\, \exp\{\tfrac{i}{\hbar}(\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{2}d_2x^2+d_1x)\} \qquad (8.4)$$

sei mit von q_2 abhängigen Funktionen d_1,d_2, $d_1(q_2^o)=d_2(q_2^o)=0$. Die allgemeine Approximationsformel für K, die in Kap. 8.3 abgeleitet wird, reduziert sich in dem einfachen Fall einer cusp-Kaustik auf den Ausdruck (8.4).

Ausgangspunkt für unsere semiklassische Approximationsformel sind die Gleichungen (7.22) und (7.27), die Darstellung des Wirkungsfunktionals durch die Entfaltung einer Singularität. Da diese Formel über Fourier Koeffizienten definiert ist, wird in Kap. 8.2 das Weg-Integral so umformuliert, daß es durch Integration über Fourier Koeffizienten bestimmt werden kann, wobei ein expliziter Ausdruck für den Normierungsfaktor abgeleitet wird. Davison [61] definierte das Weg-Integral, indem er die Geschwindigkeiten der Wege q(t) nach einem vollständigen Orthonormalsystem entwickelte. Diese Methode, die auf einige einfache Fälle angewandt wurde [62,63], ist i.a. schwierig zu handhaben und unterscheidet sich wesentlich von unserer Technik.

In Kap. 8.1 werden die wichtigsten Eigenschaften linearer Euler-Lagrange-Gleichungen zusammengestellt, die in Kap. 8.3 benötigt werden. Unter anderem wird ein Theorem von Levit und Smilansky [64,65] über unendliche Produkte von Eigenwerten bewiesen. In dem zentralen Kapitel 8.3 leiten wir die grundlegende semiklassische Approximationsformel für das Weg-Integral ab, die in einer Umgebung der konjugierten Punkte P_1^o,P_2^o der Ordnung M' ($1\leq M'\leq M$) gültig bleibt. Die Approximationsformel ist proportional zu einem oszillatorischen Integral mit dem Katastrophenpolynom $f(x,d(\mathfrak{E}))$ nach (7.27) im Exponent des Integranden, dessen Entfaltungsparameter $d=d(\mathfrak{E})$ Funktionen von $\mathfrak{E}=(P_1-P_1^o,P_2-P_2^o)$ sind. Die Bifurkationsmenge Σ_f von f (die Kaustiken) unterteilt den $\mathfrak{E}$-Raum in verschiedene Gebiete. In jedem dieser Gebiete existieren i.a. mehrere verschiedene klassische Wege $q_c(t;\mathfrak{E})$, die eindeutig bestimmt sind aus den Lösungen des "Gradientensystems" $\nabla_x f=0$; $x=(x_1,\ldots,x_{M'})$ spielt also die Rolle von Ordnungsparametern. Nach Kap. 7 entsprechen die Bifurkationseigenschaften der Euler-Lagrange-Gleichung eindeutig jenen von f. Wenn $\mathfrak{E}$ eine genügende Distanz von Σ_f besitzt, wird durch Approximation des oszillatorischen Integrals die konventionelle Approximationsformel (8.3) erhalten, wobei über alle klassischen Wege summiert wird, die aus $\nabla_x f=0$ bestimmt sind. In klassisch ver-

botenen Gebieten erhalten wir ein ähnliches Resultat wie Miller [52] und Koeling und Malifet [53]. Für $\mathfrak{E}$ nahe bei oder auf Σ_f, d.h. in dem "kritischen Bereich", wird eine gleichförmige Approximation des oszillatorischen Integrals unter Verwendung von Techniken Duistermaats [8] und Berrys [66] (vgl. Gleich.(8.119)) abgeleitet.

Falls zwei verschiedene klassische Wege zu dem semiklassischen Propagator (8.3) im klassisch erlaubten Gebiet beitragen, auf der Kaustik ineinander übergehen und jenseits der Kaustik im klassisch verbotenen Bereich verschwinden, erhielt Miller [67] eine a posteriori gleichförmige semiklassische Approximation für K mit der regulären und irregulären Airy-Funktion, um die "primitive" semiklassische Approximation bei der Kaustik zu verbessern. In Kap. 8.4(1) wird sich herausstellen, daß unsere Approximationsformel (8.119) eine äquivalente Approximation für K in diesem speziellen Fall impliziert. In Kap. 8.4(2) werden die Resultate von Kap. 8.3 am Beispiel des quantisierten anharmonischen Oszillators illustriert, wobei die Ergebnisse von Kap. 7.3 verwendet werden.

8.1 Lineare Euler-Lagrange-Gleichungen, ein Theorem von Levit und Smilansky

Wir stellen einige Eigenschaften linearer Euler-Lagrange-Gleichungen zusammen, die in Kap. 8.3(1) benötigt werden. Gegeben sei die quadratische Lagrangefunktion

$$\hat{\mathcal{L}}(q,\dot{q},t) = \tfrac{1}{2}\,\dot{q}^T W(t)\dot{q} + \dot{q}^T R(t) q - \tfrac{1}{2}\, q^T V(t) q, \tag{8.5}$$

mit einer stetig differenzierbaren, symmetrischen und positiv definiten Matrix W, einer symmetrischen und stetigen Matrix V und einer stetig differenzierbaren Matrix R. Die zu (8.5) assoziierte Euler-Lagrange-Gleichung ist

$$\hat{L}q := -\frac{d}{dt}(W\dot{q} + Rq) + R^T\dot{q} - Vq = 0. \tag{8.6}$$

$p:=(p_1,\ldots,p_M)^T$ bezeichne die verallgemeinerten Impulse, $p = \partial\hat{\mathcal{L}}/\partial\dot{q} = W\dot{q}+Rq$, und $\hat{H} := q^T p - \hat{\mathcal{L}}$ sei die Hamiltonfunktion des Systems,

$$\hat{H}(p,q,t) = \tfrac{1}{2}p^T W^{-1} p - q^T R^T W^{-1} p + \tfrac{1}{2} q^T (R^T W^{-1} R + V) q. \tag{8.7}$$

Für die Hamilton-Gleichungen ergibt sich

$$\left(J := \begin{bmatrix} 0 & E_M \\ -E_M & 0 \end{bmatrix}\right) \qquad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \partial\hat{H}/\partial q \\ \partial\hat{H}/\partial p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R & W^{-1} \\ R^T W^{-1} R + V & R^T W^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}. \tag{8.8}$$

$U(t,t') \in \mathcal{M}(M,M)$ sei Lösungsmatrix von (8.6) mit Anfangsbedingung $U(t',t')=0$, $\dot{U}(t',t') = E_M$. Wir gehen von einer festen Anfangs-und Endzeit $t_1 < t_2$ aus und setzen

$$U_i(t) := U(t,t_i),\ V_i(t) := W(t)\dot{U}(t,t_i) + R(t)U(t,t_i);\ i=1,2.$$

Die 2Mx2M-Matrix $\Psi(t)$,

$$\Psi(t) := \begin{bmatrix} U_2(t) & U_1(t) \\ V_2(t) & V_1(t) \end{bmatrix}$$

ist Lösungsmatrix von (8.8) und genügt somit [68] der Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left[\Psi^T(t)J\Psi(t)\right] = 0, \tag{8.9}$$

woraus sofort folgt, daß

$$U_2^T(t)V_2(t)-V_2^T(t)U_2(t) = 0 \tag{8.10a}$$

$$U_1^T(t)V_1(t)-V_1^T(t)U_1(t) = 0 \tag{8.10b}$$

$$U_1^T(t)V_2(t)-V_1^T(t)U_2(t) = C_1^TW(t_2) = -W(t_1)C_2 =: C_o, \tag{8.10b}$$

wobei $C_1:=U_1(t_2)$, $C_2:=U_2(t_1)$. Wir nehmen an, daß C_1 regulär ist, dann ist C_2 ebenfalls regulär und $\Psi(t)$ ist Fundamentalmatrix des linearen Differentialgleichungssystems (8.8). Die inverse Matrix $\Psi^{-1}(t)$ ergibt sich aus (8.9) zu

$$\Psi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -C_o^{-1}V_1^T(t) & C_o^{-1}U_1^T(t) \\ (C_o^T)^{-1}V_2^T(t) & -(C_o^T)^{-1}U_2^T(t) \end{bmatrix} \tag{8.11}$$

und für das Inverse der 2Mx2M-Matrix $\Phi(t)$,

$$\Phi(t) := \begin{bmatrix} U_2(t) & U_1(t) \\ \dot{U}_2(t) & \dot{U}_1(t) \end{bmatrix} \tag{8.12a}$$

erhält man

$$\Phi^{-1}(t) := \begin{bmatrix} C_o^{-1}(U_1^T(t)R(t)-V_1^T(t)) & C_o^{-1}U_1^T(t)W(t) \\ (C_o^T)^{-1}(V_2^T(t)-U_2^T(t)R(t)) & -(C_o^T)^{-1}U_2^T(t)W(t) \end{bmatrix}. \tag{8.12b}$$

Aus (8.12) folgt, daß

$$U_2(t)C_o^{-1}U_1^T(t) - U_1(t)(C_o^T)^{-1}U_2^T(t) = 0 \tag{8.13a}$$

$$U_1(t)(C_o^T)^{-1}\dot{U}_2^T(t) - U_2(t)C_o^{-1}\dot{U}_1^T(t) = W^{-1}(t) \tag{8.13b}$$

$$\dot{U}_2(t)C_o^{-1}U_1^T(t) - \dot{U}_1(t)(C_o^T)^{-1}U_2^T(t) = W^{-1}(t). \tag{8.13c}$$

Nach der Formel der Variation der Konstanten [69] folgt, daß zu gegebenem $f=f(t) \in \mathbb{R}^M$ die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $\hat{L}q=f$ mit Anfangsbedingung $q(t_1)=\dot{q}(t_1)=0$ gegeben ist durch

$$q(t) = \int_{t_1}^{t}\left[U_1(t)(C_o^T)^{-1}U_2^T(\tau) - U_2(t)C_o^{-1}U_1^T(\tau)\right]f(\tau)d\tau. \tag{8.14}$$

Da $\det C_1 \neq 0$ vorausgesetzt wurde, besitzt das Randwertproblem

$$\hat{L}v(t) = f(t), \quad v(t_1) = v(t_2) = 0, \tag{8.15}$$

zu gegebenem $f(t)$ eine eindeutige Lösung $v(t)$, die sich mit der Green'schen Matrix $G(t,\tau)\in\mathcal{M}(M,M)$ berechnen läßt, $v(t)=\int_{t_1}^{t_2}G(t,\tau)f(\tau)d\tau$. Mit (8.14) erhält man für G:

$$G(t,\tau) = \begin{cases} -U_2(t)C_o^{-1}U_1^T(\tau) & \text{für } t_1 \leq \tau \leq t \leq t_2, \\ -U_1(t)(C_o^T)^{-1}U_2^T(\tau) & \text{für } t_1 \leq t \leq \tau \leq t_2. \end{cases} \tag{8.16a}$$

G ist stetig für $(t,\tau) \in [t_1,t_2]\times[t_1,t_2]$ und genügt für jedes $\tau \in [t_1,t_2]$ den Rand-

bedingungen $G(t_1,\tau)=G(t_2,\tau)=0$. Die Ableitung von G bzgl. t macht bei $t=\tau$ einen Sprung, $\partial G(t+0,\tau=t)/\partial t-\partial G(t-0,\tau=t)/\partial t=-W^{-1}(t)$ und für jedes $\tau\in\,]t_1,t_2[$ genügt G als Funktion von t in den Intervallen $[t_1,\tau[$ und $]\tau,t_2]$ der Gleichung $\hat{L}G=0$. Wir geben noch eine andere Darstellung der Green'schen Matrix an, die in Kap. 8.3(1) verwendet wird: $\tilde{U}_i(t)\in\mathcal{M}(M,M)$ (i=1,2) seien Lösungsmatritzen von $\hat{L}\tilde{U}_i(t)=0$ mit Anfangsbedingungen $\tilde{U}_2(t_1)=W(t_1)\dot{\tilde{U}}_1(t_1)+R(t_1)=0, \tilde{U}_1(t_1)=E_M, \dot{\tilde{U}}_2(t_1)=W^{-1}(t_1)$. Analog zu (8.16a) leitet man den folgenden Ausdruck (8.16b) für G ab:

$$G(t,\tau) = -\tilde{U}_2(t)\tilde{U}_2^{-1}(t_2)\tilde{U}_1(t_2)\tilde{U}_2^{T}(\tau) + \begin{cases}\tilde{U}_1(t)\tilde{U}_2^{T}(\tau) & \text{für } t_1\leq\tau\leq t\leq t_2,\\ \tilde{U}_2(t)\tilde{U}_1^{T}(\tau) & \text{für } t_1\leq t\leq\tau\leq t_2.\end{cases} \tag{8.16b}$$

Bezeichne mit $\hat{L}_o$ den Differentialoperator $\hat{L}_o:=-(d/dt)W(t)(d/dt)$ und setze $\hat{L}_1(z):=\hat{L}_o+z(\hat{L}-\hat{L}_o)$, $z\in\mathbb{R}$. $\{v_k(t,z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ seien die Eigenfunktionen $(\int_{t_1}^{t_2}v_k^{T}v_j\,dt=\delta_{kj})$ und $\{\lambda_k(z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ die zugehörigen (ihrer Vielfachheit entsprechend gezählten) Eigenwerte des Eigenwertproblems

$$\hat{L}_1(z)v_k(t,z) = \lambda_k(z)v_k(t,z),\ v_k(t_1,z)=v_k(t_2,z)=0. \tag{8.17}$$

$U_i(t,z)$ (i=1,2) seien die Lösungsmatritzen von $\hat{L}_1(z)U_i(t,z)=0$ mit Anfangsbedingungen $U_i(t_i,z)=0$, $\dot{U}_i(t_i,z)=E_M$, i=1,2. Wir beweisen das folgende Theorem 8.1, das von Levit und Smilansky [65] für R=0 bewiesen wurde:

Theorem 8.1. Für jedes $z\in\mathbb{R}$ gilt

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k(z)}{\lambda_k(0)} = \frac{\det C_1(z)}{\det C_1(0)},\quad C_1(z):=U_1(t_2,z). \tag{8.18}$$

Beweis: Man beachte zuerst die folgenden Tatsachen:

(1) Für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt $\lambda_k(0)>0$ (vgl. Kap. 4.1) und es ist $\lambda_k(0)\approx c_o k^2$ für $k\to\infty$ mit einer positiven Konstanten c_o [70].

(2) Die $\lambda_k(z)$, $U_i(t,z)$, $v_k(t,z)$ sind analytisch in z [71].

(3) Für große k gilt $|\lambda_k(z)-\lambda_k(0)|\leq c_1 z$ mit einer positiven Konstanten c_1 [70], daher konvergiert wegen (1) das Produkt auf der linken Seite von (8.18) gleichmäßig für alle z.

(4) Zu gegebenem z gibt es höchstens eine endliche Anzahl von nichtnegativen Eigenwerten (vgl. Kap. 4.1). Die linke Seite von (8.18) verschwindet daher in jedem beschränkten reellen Intervall für höchstens endlich viele z-Werte.

(5) Eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\det C_1(z)=0$ ist, daß mindestens ein Eigenwert $\lambda_k(z)$ verschwindet. Die linke und rechte Seite von (8.18) verschwindet daher simultan und zwar in jedem beschränkten Intervall für höchstens endlich viele z-Werte.

Setze

$$g_1(z) := \prod_{k=1}^{\infty}\lambda_k(z)/\lambda_k(0) \tag{8.19a}$$

$$g_2(z) := \det C_1(z)/\det C_1(0). \tag{8.19b}$$

Wir zeigen, daß für alle z mit $g_1(z)\neq 0$ die Beziehung $(dg_1(z)/dz)/g_1(z) = (dg_2(z)/dz)/g_2(z)$ erfüllt ist. Da $g_1(0)=g_2(0)=1$, folgt daraus nach dem Eindeutig-

keitssatz für Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen bereits die Behauptung.

(i) Wegen (3) kann die rechte Seite von (8.19a) wie ein endliches Produkt differenziert werden. Man erhält für z mit $g_1(z)\neq 0$:

$$(dg_1(z)/dz)/g_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k(z)}\, d\lambda_k(z)/dz \tag{8.20}$$

Aus $\int_{t_1}^{t_2} v_k^T v_j dt = \delta_{kj}$ und $\lambda_k(z) = \int_{t_1}^{t_2} (L_1(z)v_k)^T v_k dt$ folgt durch Differentiation nach z, daß

$$d\lambda_k(z)/dz = -\int_{t_1}^{t_2} v_k^T(t,z)\left\{\left[\dot{R}(t) + V(t)\right]v_k(t,z) - R^a(t)\dot{v}_k(t,z)\right\}dt, \tag{8.21}$$

wobei R^a die antisymmetrische Matrix $R^a(t)=R^T(t)-R(t)$ ist. Setze $C_0(z) := C_1^T(z)W(t_2)$. Die Reihe der Matritzen auf der linken Seite von (8.22),

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t,z)v_k^T(\tau,z)/\lambda_k(z) = G(t,\tau,z), \tag{8.22}$$

konvergiert [41] gleichmäßig in (t,τ,z) und absolut gegen die durch (8.16a) definierte Green'sche Matrix $G(t,\tau,z)$ ($U_i(t)\equiv U_i(t,z)$, $C_0\equiv C_0(z)$). Das Integral auf der rechten Seite von (8.21) ist gleichmäßig beschränkt für alle $k\in\mathbb{N}$. Daraus folgt mit (8.22) und (8.16a), daß

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(1/\lambda_k(z))\int_{t_1}^{t_2} v_k^T(t,z)\left[\dot{R}(t)+V(t)\right]v_k(t,z)dt &= \mathrm{Tr}\left\{\int_{t_1}^{t_2} G(t,t,z)\left[\dot{R}(t)+V(t)\right]dt\right\}\\ &= -\mathrm{Tr}\left\{\int_{t_1}^{t_2} U_1(t,z)(C_0^T(z))^{-1}U_2^T(t,z)\left[\dot{R}(t)+V(t)\right]dt\right\}\\ &= -\mathrm{Tr}\left\{(C_0^T(z))^{-1}\int_{t_1}^{t_2} U_2^T(t,z)\left[\dot{R}(t)+V(t)\right]U_1(t,z)dt\right\},\end{aligned}$$

wobei (8.16a) und die Invarianz der Spur eines Matrixproduktes gegen Vertauschung der Multiplikationsreihenfolge benützt wurde. Differentiation von

$$G(t+\varepsilon,t,z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t+\varepsilon,z)v_k^T(t,z)/\lambda_k(z)$$

nach ε und anschließender Grenzübergang $\varepsilon \to \pm 0$ ergibt mit (8.16a), daß

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{v}_k(t+\varepsilon,z)v_k^T(t,z)/\lambda_k(z) = -U_2(t,z)C_0^{-1}(z)U_1^T(t,z) \tag{8.24a}$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{v}_k(t+\varepsilon,z)v_k^T(t,z)/\lambda_k(z) = -U_1(t,z)(C_0^T(z))^{-1}U_2^T(t,z) \tag{8.24b}$$

Multiplikation von (8.24a) von rechts mit $R^a(t)$ und anschließende Spurbildung liefert

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \sum_{k=1}^{\infty} v_k^T(t,z)R^a(t)\dot{v}_k(t+\varepsilon,z)/\lambda_k(z) &= -\mathrm{Tr}\left\{\dot{U}_2(t,z)C_0^{-1}(z)U_1^T(t,z)R^a(t)\right\} \qquad (8.25a)\\ &= -\mathrm{Tr}\left\{(C_0^T(z))^{-1}U_2^T(t,z)R^a(t)\dot{U}_1(t,z)\right\},\end{aligned}$$

wobei (8.13c) und die Tatsache benützt wurde, daß die Spur des Produktes einer symmetrischen mit einer antisymmetrischen Matrix verschwindet. Analog erhält man

aus (8.24b),

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}} \sum_{k=1}^{\infty} v_k^T(t,z)R^a(t)\dot{v}_k(t+\varepsilon,z)/\lambda_k(z) = -\operatorname{Tr}\left\{(C_0^T(z))^{-1}U_2^T(t,z)R^a(t)\dot{U}_1(t,z)\right\}. \qquad (8.25b)$$

Nach (8.25) stimmen linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert ($\varepsilon\to 0$) der Funktion

$$\tilde{f}(t,\varepsilon,z) := \sum_{k=1}^{\infty} v_k^T(t,z)R^a(t)\dot{v}_k(t+\varepsilon,z)/\lambda_k(z)$$

überein und daraus folgt, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k(z)}\int_{t_1}^{t_2} v_k^T(t,z)R^a(t)\dot{v}_k(t,z)dt = -\operatorname{Tr}\left\{(C_0^T(z))^{-1}\int_{t_1}^{t_2} U_2^T(t,z)R^a(t)\dot{U}_1(t,z)dt\right\}. \qquad (8.26)$$

Mit (8.20), (8.21), (8.23) und (8.26) folgt für z mit $g_1(z)\neq 0$:

$$(dg_1(z)/dz)/g_1(z) = \operatorname{Tr}\left\{(C_0^T(z))^{-1}\int_{t_1}^{t_2} U_2^T(t,z)\left[(\dot{R}(t)+V(t))U_1(t,z)-R^a(t)\dot{U}_1(t,z)\right]dt\right\}. \qquad (8.27)$$

(ii) Allgemein gilt für z mit $\det C_1(z)\neq 0$, daß

$$(dg_2(z)/dz)/g_2(z) = \frac{d}{dz}\det C_1(z)/\det C_1(z) = \operatorname{Tr}\left\{C_1^{-1}(z)\frac{d}{dz}C_1(z)\right\}. \qquad (8.28)$$

Setze $Z(t,z):=\partial U_1(t,z)/\partial z$. Durch Differentiation der Gleichung $\hat{L}_1(z)U_1(t,z)=0$ nach z zeigt man, daß Z der inhomogenen Differentialgleichung

$$\hat{L}_1(z)Z(t,z) = (\dot{R}(t)+V(t))U_1(t,z) - R^a(t)\dot{U}_1(t,z) \qquad (8.29)$$

mit Anfangsbedingungen $Z(t_1,z)=\dot{Z}(t_1,z)=0$ genügt. Nach (8.14) folgt daraus, daß

$$Z(t_2,z) = C_1(z)(C_0^T(z))^{-1}\int_{t_1}^{t_2} U_2^T(t,z)\left[(\dot{R}(t)+V(t))U_1(t,z) - R^a(t)\dot{U}_1(t,z)\right]dt\ . \qquad (8.30)$$

Einsetzen von (8.30) in (8.28) und Vergleich von (8.27) mit (8.28) liefert die Behauptung. □

Wir geben noch einen expliziten Ausdruck für $C_1(0)$ an: Durch Differentiation nach t überzeugt man sich leicht davon, daß

$$U_1(t,0) = \int_{t_1}^{t} W^{-1}(\tau)d\tau W(t_1),$$

d.h. es gilt

$$C_1(0) = \int_{t_1}^{t_2} W^{-1}(\tau)d\tau W(t_1).$$

8.2 Definition des Weg-Integrals durch Integration über Fourier-Koeffizienten

In diesem Abschnitt wird die Definition des Weg-Integrals so umformuliert, daß die Integration über Eckpunkte von Polygonen, die die Wege approximieren, durch Integration über Fourier-Koeffizienten ersetzt werden kann. Die Translationsinvarianz des Wegdifferentials [72] erlaubt es, Gleich. (8.1) zu schreiben als

$$K(P_2,P_1) = \int D_{(0,t_1)(0,t_2)}[\tilde{q}(t)]\exp\left\{\tfrac{i}{\hbar}S_{t_1t_2}[q_1,q_2,\tilde{q}(t)]\right\}. \qquad (8.31)$$

Dabei ist $S_{t_1t_2}$ durch (7.7) definiert mit einem beliebigen Weg $\hat{q}(t)=\hat{q}(t;P_1,P_2)$, $\hat{q}(t_i)=q_i$ (i=1,2). Für die Lagrangefunktion (7.1) ist der Ausdruck (8.31) definiert

durch [51,73,74]:

$$K(P_2,P_1) = \lim_{N\to\infty} K_N(P_2,P_1), \tag{8.32}$$

wobei

$$K_N(P_2,P_1) := J_N \int dq_1^1 \ldots dq_1^N \ldots dq_M^1 \ldots dq_M^N \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_N(P_1,P_2;q_{(N)})\right\} \tag{8.33}$$

mit der Normierungskonstanten J_N,

$$J_N := \left[\prod_{j=0}^{N} \det\left(\frac{N+1}{2\pi i\hbar\,\Delta t}\, W(\tau_j)\right)\right]^{1/2}. \tag{8.34}$$

S_N ist analog zum Wiener-Integral [73,74] definiert durch eine Zerlegung des Zeitintervalls $[t_1,t_2]$ in N+1 Teilintervalle mit dem Zeitgitter $\tau_o,\tau_1,\ldots,\tau_N,\tau_{N+1}$, wobei $t_1=\tau_o$ und $\tau_j:=t_1+j\Delta t/(N+1)$. Der stetige Weg $\tilde{q}(t)$ wird durch ein Polygon $\tilde{q}_N(t)$ und die Geschwindigkeit $\dot{\tilde{q}}(t)$ durch die korrespondierendeTreppenfunktion $\dot{\tilde{q}}_N(t)$ ersetzt mit Eckpunkten (q^k,τ_k), $q^k=(q_1^k,\ldots,q_M^k)^T$, $0\leq k\leq N+1$, wobei $q^o=q^{N+1}=0$. Durch Einsetzen von $\tilde{q}_N(t)$, $\dot{\tilde{q}}_N(t)$ in (7.7) erhält man die Funktion S_N, die von P_1,P_2 und $q_{(N)}:=(q_1^1,\ldots\ldots,q_M^N)$ abhängt. Es sei nun $\{\tilde{v}_j(s;t_1,t_2)\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\tilde{v}_j(s)=\tilde{v}_j(s;t_1,t_2)=(\tilde{v}_{j1}(s;t_1,t_2),\ldots,\tilde{v}_{jM}(s;t_1,t_2))^T$ das vollständige Orthonormalsystem des Differentialoperators $\hat{L}_o$,

$$\hat{L}_o=\hat{L}_o(t_1,t_2) := -\frac{d}{ds}W^*(s;t_1,t_2)\frac{d}{ds} \tag{8.35}$$

(vgl. Gleich. (7.12a)) bzgl. homogener Randbedingungen $\tilde{v}_j(0)=\tilde{v}_j(1)=0$, mit Eigenwerten $\lambda_j^o=\lambda_j^o(t_1,t_2)$, d.h. $\hat{L}_o\tilde{v}_j(s)=\lambda_j^o\tilde{v}_j(s)$. (Die Orthonormalität bezieht sich hier wie üblich auf das Skalarprodukt $(.,.)$ in $H_o:=(L_2(]0,1[))^M$.) Da $W^*(s;t_1,t_2)$ positiv definit ist, sind alle Eigenwerte λ_j^o positiv. Für festes N wird eine lineare Transformation $q_{(N)}(b_{(N)})$ durchgeführt,

$$q_{(N)}=(q_1^1,\ldots,q_M^N)\longrightarrow b_{(N)}:=(b_1,\ldots,b_{NM}), \tag{8.36}$$

wobei die b_i in $b_{(N)}$ die ersten MN Fourier-Koeffizienten des Weges $\tilde{q}_N(t_1+s\Delta t)$ $(0\leq s\leq 1)$ bzgl. des Orthonormalsystems $\{\tilde{v}_j(s)\}_{j\in\mathbb{N}}$ sind. Für das Integral in (8.33) ergibt sich,

$$\int dq_1^1\ldots dq_M^N\, e^{iS_N/\hbar} = R_N \int db_1\ldots db_{MN}\, e^{i\bar{S}_N/\hbar}. \tag{8.37}$$

Dabei ist R_N die Determinante der linearen Transformation (8.36), $R_N:=\det(\partial q_{(N)}/\partial b_{(N)})$, und $\bar{S}_N(P_1,P_2;b_{(N)}):=S_N(P_1,P_2;q_{(N)}(b_{(N)}))$. Im Limes $N\to\infty$ erhält man

$$\lim_{N\to\infty}\bar{S}_N(P_1,P_2;b_{(N)}) = S^*\left[P_1,P_2;\sum_{j=1}^{\infty}b_j\tilde{v}_j(s)\right]/\Delta t, \tag{8.38}$$

mit S^* nach (7.9). Da wir nur am Grenzfall interessiert sind, kann (8.6) ersetzt werden durch

$$K(P_2,P_1) = \lim_{N\to\infty}\bar{K}_N(P_2,P_1), \tag{8.39}$$

wobei

$$\bar{K}_N := J_N R_N \int db_1\ldots db_{MN} \exp\left\{iS^*\left[P_1,P_2;\sum_{j=1}^{MN}b_j\tilde{v}_j(s)\right]/\hbar\,\Delta t\right\}. \tag{8.40}$$

Wir betrachten nun das Wirkungsfunktional"freier Teilchen",

$$S^{o}_{P_1P_2}[q(t)] := \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \dot{q}^T(t)W(t)\dot{q}(t)dt \,. \tag{8.41}$$

Für $\hat{q}$ wählen wir die Lösung der zu $S^{o}_{P_1P_2}$ korrespondierenden Euler-Lagrange-Gleichung, d.h.

$$\hat{q}(t;P_1,P_2) = q_1 + \int_{t_1}^{t} W^{-1}(\tau)d\tau \left[\int_{t_1}^{t_2} W^{-1}(\tau)d\tau\right]^{-1}(q_2 - q_1). \tag{8.42}$$

Mit (7.10)-(7.12), (8.41) und (8.42) ergibt sich, daß

$$S^{o*}\left[P_1,P_2;\sum_{j=1}^{MN} b_j v_j(s)\right] = \Delta t S^{oc}(P_1,P_2) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{MN} \lambda_j^o(t_1,t_2) b_j^2, \tag{8.43}$$

wobei S^{oc} die Hamilton'sche Principalfunktion des Wirkungsfunktionals (8.41) ist,

$$S^{oc}(P_1,P_2) = \frac{1}{2}(q_2^T - q_1^T)\left[\int_{t_1}^{t_2} W^{-1}(\tau)d\tau\right]^{-1}(q_2 - q_1) \,. \tag{8.44}$$

Einsetzen von S^{o*} für S^* in (8.40) liefert

$$\bar{K}_N^o := J_N \int db_1 \ldots db_{MN} \exp\left\{iS^{o*}\left[P_1,P_2;\sum_{j=1}^{MN} b_j \tilde{v}_j(s)\right]/\hbar\Delta t\right\} = J_N R_N e^{iS^{oc}/\hbar} \prod_{j=1}^{MN} (2\pi i\hbar\Delta t/\lambda_j^o)^{1/2}. \tag{8.45}$$

Substitution von $S^{o}_{P_1P_2}$ in (8.33) ergibt für

$$K_N^o := J_N \int dq_1^1 \ldots dq_M^N \, e^{iS_N^o/\hbar}$$

nach einem Resultat von Papadopoulos [75] im Limes $N\to\infty$:

$$\lim_{N\to\infty} K_N^o = \left[\det(2\pi i\hbar\int_{t_1}^{t_2} W^{-1}(t)dt\right]^{-1/2} e^{iS^{oc}/\hbar} \,. \tag{8.46}$$

Aus $\lim\limits_{N\to\infty} K_N^o = \lim\limits_{N\to\infty} \bar{K}_N^o$ folgt mit (8.45) und (8.46), daß $\lim\limits_{N\to\infty} c_N = 1$, wobei

$$c_N := \left[\det(2\pi i\hbar\int_{t_1}^{t_2} W^{-1}(t)dt)\right]^{-1/2}\left[\prod_{j=1}^{MN}(\lambda_j^o/2\pi i\hbar\Delta t)^{1/2}\right]/J_N R_N \,. \tag{8.47}$$

Setzt man daher $K_N^* := c_N \bar{K}_N$ für die allgemeine Lagrangefunktion (7.1), so erhält man $\lim\limits_{N\to\infty} K_N^* = \lim\limits_{N\to\infty} \bar{K}_N$. Daher folgt mit (8.39), (8.40) und (8.47) für den Propagator:

$$K(P_2,P_1) = \lim_{N\to\infty} K_N^*(P_2,P_1), \tag{8.48}$$

wobei

$$K_N^* := J_N^* \int db_1 \ldots db_{MN} \exp\left\{iS^*\left[P_1,P_2;\sum_{j=1}^{MN} b_j \tilde{v}_j(s)\right]/\hbar\Delta t\right\}, \tag{8.49}$$

mit der Normierungskonstanten J_N^*,

$$J_N^*(t_1,t_2) := \left[\det(2\pi i\hbar\int_{t_1}^{t_2} W^{-1}(t)dt)\right]^{-1/2}\prod_{j=1}^{MN}(\lambda_j^o(t_1,t_2)/2\pi i\hbar\Delta t)^{1/2}. \tag{8.50}$$

Die Definition (8.48)-(8.50) des Weg-Integrals bietet den Vorteil, daß für alle Raum-Zeit-Punkte (P_1,P_2) über einen fest vorgegebenen Funktionenraum integriert werden kann. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß jedes beliebige vollständige Orthonormalsystem verwendet werden kann. Ist nämlich $\{\tilde{w}_j(s)\}_{j\in\mathbb{N}}$ ein anderes vollständiges Orthonormalsystem bzgl. aller auf $[0,1]$ erklärten und in den Randpunkten verschwindenden Vektorfunktionen, so gehen die Fourier-Koeffizienten $(b_1,\ldots,b_{MN})$

bzgl. $\{\tilde{v}_1(s),\ldots,\tilde{v}_{MN}(s)\}$ durch eine lineare Transformation T_N über in die Fourier-Koeffizienten $(\tilde{b}_1,\ldots,\tilde{b}_{MN})$ bzgl. $\{\tilde{w}_1(s),\ldots,\tilde{w}_{MN}(s)\}$. Da $\lim_{N\to\infty} T_N$ eine orthogonale Transformation ist, folgt, daß $\det T_N \to 1$ $(N\to\infty)$. Setzt man daher

$$\tilde{K}_N^* := J_N^* \int d\tilde{b}_1 \ldots d\tilde{b}_{MN} \exp\{iS^*[p_1,p_2;\sum_{j=1}^{MN}\tilde{b}_j\tilde{w}_j(s)]/\hbar\Delta t\},$$

so folgt $\lim_{N\to\infty}\tilde{K}_N^* = \lim_{N\to\infty} K_N^*$. In (8.49) kann somit ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem verwendet werden.

Die Herleitung von (8.48)-(8.50) wurde nur unter dem Aspekt durchgeführt, eine zur "Zeitgitterintegration" alternative Technik zur Bestimmung des Weg-Integrals anzugeben, die in Kombination mit (7.22) zu der"endlichen Approximation"führt, die in Kap. 8.3 abgeleitet wird. Das mathematische Problem einer maßtheoretischen Begründung von (8.48)-(8.50) wurde bislang außer acht gelassen. Gelfand und Yaglom [73] interpretieren (8.32)-(8.34) für den Spezialfall $W_{ij}(t)=m_i\delta_{ij}$ und $R_i=0$ (die m_i sind konstante Massen) bzgl. Zylindermaßen auf dem Banachraum der stetigen Funktionen. DeWitt-Morette [76] gibt eine Definition über ein Pseudomaß, welches ebenfalls auf dem Banachraum der stetigen Funktionen erklärt ist. Ihre Definition besitzt den Vorteil, daß sie ohne Grenzwertbildung auskommt. Jedoch benützen sowohl Gelfand und Yaglom als auch DeWitt-Morette die Geschwindigkeiten der Wege bei der Definition des Maßes, obwohl stetige Funktionen a priori keine Ableitungen besitzen. Albeverio und Krohn [77] definieren ein Maß auf dem Hilbertraum $\tilde{H}[q_2,t_2]$, der durch den Abschluß aller auf $[0,t_2]$ $(t_1=0)$ stetig differenzierbaren Wege $q(t)$ mit $q(t_2)=q_2$ bzgl. des Skalarprodukts von $W_2^{1,M}(]0,t_2[)$ definiert ist. Sie zeigen mit Hilfe der Dyson-Entwicklung, daß die Lösung $\Psi(t_2,q_2)$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung mit vorgegebener Anfangsbedingung bei $t_2=0$ durch Funktionalintegration über $\tilde{H}[q_2,t_2]$ bestimmt werden kann. Wir vermuten, daß (8.48)-(8.50) in ähnlicher Weise durch ein geeignetes Maß auf dem Sobolew'schen Raum $H:=\mathring{W}_2^{1,M}(]0,1[)$ interpretiert werden kann, befassen uns jedoch hier nicht näher mit diesem Problem.

8.3 Semiklassische Approximation in der Nähe konjugierter Punkte

Wir gehen wieder von der in Kap. 7 behandelten Problemstellung aus und verwenden alle in Kap. 7 eingeführten Bezeichnungen. Das Ziel ist es, eine endliche semiklassische Approximationsformel für den Propagator in einer Umgebung der bzgl. des klassischen Weges $q_0(t)$ konjugierten Punkte P_1^0,P_2^0 der Ordnung M' $(1\leq M'\leq M)$ abzuleiten. Für kleine (ε,y,a) ist die Matrix $\{\hat{B}_{ij}(\varepsilon,y,a)\}_{i,j\geq M'+1}$ (vgl. Gleich. (7.21f)) regulär. Wir approximieren daher $\hat{B}_{ij}$ durch $\hat{B}_{ij}(\varepsilon,y,a)\approx B_{ij}(\varepsilon,y):=\hat{B}_{ij}(\varepsilon,y,0)$, d.h. $B_{ij}(\varepsilon,y)=\partial^2 S_1^*(\varepsilon,y,0)/\partial a_i\partial a_j$ $(i,j\geq M'+1)$. Dies impliziert mit (7.23) die folgende Approximation des Wirkungsfunktionals S^*:

$$S^*(\varepsilon,y,a) \approx S^*(\varepsilon,0) + g(y,\varepsilon) + \frac{1}{2}\sum_{k,j=M'+1}^{\infty} B_{kj}(\varepsilon,y)(a_k-h_k(y,\varepsilon))(a_j-h_j(y,\varepsilon)). \quad (8.51)$$

Der wesentliche Unterschied zwischen (8.51) und der konventionellen Approximationsformel (8.2) besteht darin, daß in (8.2) das Wirkungsfunktional insgesamt durch eine quadratische Form angenähert wurde, während in (8.51) Terme höherer Ordnung als zwei bzgl. der Fourier-Koeffizienten $(y_1,\dots,y_{M'})$ berücksichtigt wurden und nur die Abhängigkeit von den Fourier-Koeffizienten $a_{M'+1}, a_{M'+2}, \dots$ durch eine reguläre quadratische Form approximiert wurde. Bevor wir die semiklassische Approximationsformel für den Propagator ableiten, benötigen wir noch einige Resultate über ein unendliches Produkt, welches über die Eigenwerte der Matrix $\{B_{kj}(\varepsilon,y)\}_{k,j\geq M'+1}$ definiert ist.

(1) Ein unendliches Produkt:

Setze $\vartheta(s) \equiv \vartheta(y,\varepsilon;s) := \sum_{j=1}^{M'} y_j v_j(s) + h(y,\varepsilon;s), \quad \vartheta(0)=\vartheta(1)=0,$

und definiere den Differentialoperator $\hat{L}=\hat{L}(y,\varepsilon)$ durch

$$\hat{L}(y,\varepsilon) := -\frac{d}{ds}\left[\hat{W}(\varepsilon_1;s)\frac{d}{ds} + \hat{R}(y,\varepsilon;s)\right] + \hat{R}^T(y,\varepsilon;s)\frac{d}{ds} - \hat{V}(y,\varepsilon;s), \tag{8.52}$$

wobei $\varepsilon_1 := (t_1-t_1^o, t_2-t_2^o)$ und die Matritzen $\hat{W}$, $\hat{R}$, $\hat{V}$ definiert sind durch

$$\hat{W}(\varepsilon_1;s) := W^*(t_1,t_2,s) \tag{8.53a}$$

$$\hat{R}_{ij}(y,\varepsilon;s) := \partial R_j^*(P_1,P_2,\vartheta(y,\varepsilon;s),s)/\partial u_j, \quad 1\leq i,j\leq M \tag{8.53b}$$

$$\hat{V}_{ij}(y,\varepsilon;s) := \partial^2 V^*(P_1,P_2,\vartheta(y,\varepsilon;s),s)/\partial u_i \partial u_j - \sum_{l=1}^{M}\left[\partial^2 R_l(P_1,P_2,\vartheta(y,\varepsilon;s),s)/\partial u_i \partial u_j\right]\vartheta_l'(y,\varepsilon;s), \quad 1\leq i,j\leq M, \tag{8.53c}$$

(':=d/ds). Dann gilt (vgl. Gleich. (7.21f)):

$$B_{ij}(\varepsilon,y) = (\hat{L}(y,\varepsilon)v_i, v_j), \quad i,j\geq M'+1. \tag{8.54}$$

Es sei weiterhin $\hat{L}_o=\hat{L}_o(\varepsilon_1)$ der Differentialoperator

$$\hat{L}_o(\varepsilon_1) := -\frac{d}{ds}\hat{W}(\varepsilon_1,s)\frac{d}{ds} \tag{8.55}$$

und $\lambda_j^o(\varepsilon_1)$ $(j\in\mathbb{N})$ seien die Eigenwerte von $\hat{L}_o$ (bzgl. der Randbedingungen $v(0)=v(1)=0$). Setze $z:=(y,\varepsilon,a)$, $a\in\mathbb{R}$. Mit $\mu_k(z)$, $k\geq M'+1$, werden die Eigenwerte der Matrix $\{\tilde{B}_{ij}(z)\}_{i,j\geq M'+1}$, $\tilde{B}_{ij}(z):=B_{ij}(\varepsilon,y)+a\delta_{ij}$ bezeichnet, d.h. $\tilde{B}_{ij}(z)=(L(z)v_i,v_j)$, wobei $L(z):=\hat{L}(y,\varepsilon)+a$ und z in einer Umgebung von $z=0$ variiert wird. Der zusätzliche reelle Parameter a wurde eingeführt, um nachher in einem Grenzübergang $a\longrightarrow 0$ einen Faktor zu bestimmen, der für die semiklassische Approximationsformel relevant ist. Das folgende Lemma wird benötigt:

Lemma 8.1. Es sei Z eine reguläre NxN-Matrix, $N>M'$,

$$Z = \begin{bmatrix} Z_0 & Z_2^T \\ Z_1 & Z_3 \end{bmatrix},$$

wobei $Z_0\in\mathcal{M}(M',M')$, $Z_1,Z_2\in\mathcal{M}(N-M',M')$, $Z_3\in\mathcal{M}(N-M',N-M')$. Für die inverse Matrix Z^{-1} gelte

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_0 & \tilde{Z}_2^T \\ \tilde{Z}_1 & \tilde{Z}_3 \end{bmatrix}$$

mit $Z_0 \in \mathcal{M}(M',M')$ etc. Dann gilt

$$\det\tilde{Z}_0 = \det Z_3/\det Z \,. \tag{8.56}$$

Beweis: Es seien $\tilde{z}^j \in \mathbb{R}^N$ $(1 \leq j \leq N)$ die Spaltenvektoren von Z^{-1} und $e^k \in \mathbb{R}^N$ $(1 \leq k \leq N)$ seien die Spaltenvektoren der NxN-Einheitsmatrix E_N. Dann gilt

$$\det\tilde{Z}_0 = \det[\tilde{z}^1,\ldots,\tilde{z}^{M'},e^{M'+1},\ldots,e^N]$$

und damit $(\det Z)(\det\tilde{Z}_0) = \det\{Z[\tilde{z}^1,\ldots,\tilde{z}^{M'},e^{M'+1},\ldots,e^N]\}$

$$= \det[e^1,\ldots,e^{M'},z^{M'+1},\ldots,z^N]\,,$$

wobei die z^j $(1 \leq j \leq N)$ die Spaltenvektoren von Z sind. Da andrerseits gilt, daß

$$\det Z_3 = \det[e^1,\ldots,e^{M'},z^{M'+1},\ldots,z^N]\,,$$

folgt Gleich. (8.56). □

Mit Hilfe von Lemma 8.1 wird ein Theorem über ein unendliches Produkt bewiesen, welches über die Eigenwerte $\mu_k(z)$ der Matrix $\tilde{B}_{ij}(z)$ definiert ist:

Theorem 8.2. Die Funktion

$$\tilde{F}(z) := \Big[\prod_{k=1}^{M'} 1/\lambda_k^0(\mathfrak{b}_1)\Big]\Big[\prod_{k=M'+1}^{\infty} \mu_k(z)/\lambda_k^0(\mathfrak{b}_1)\Big]$$

ist eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion für z in einer Umgebung von z=0.

Beweis: Der Beweis wird in drei Schritten durchgeführt.
(1) $\bar{\lambda}_k(z)$ $(k \in \mathbb{N})$ seien die Eigenwerte von L(z) und c sei eine positive Konstante, so daß $\bar{\lambda}_k(z)+c > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und z in einer Umgebung von z=0. Dann ist (vgl. Kap. 4.1(1)) der Differentialoperator $L_c(z) := L(z)+c$ ein topologischer Isomorphismus von $H := \mathring{W}_2^{1,M}(]0,1[)$ nach dem Dualraum $H^* := \mathring{W}_2^{-1,M}(]0,1[)$ von H. Es sei $\mathcal{G}_c(z) : H^* \to H$ der zu L_c inverse Operator. Setze $\bar{A}(z) := \mathcal{G}_c(z)L(z) : H \longrightarrow H$ und $\tilde{A}(z) := 1-\bar{A}(z)$. $\bar{A}(z)$ ist stetig und linear auf H und besitzt Eigenwerte $\lambda_{\bar{A},k}(z) = \bar{\lambda}_k(z)/(\bar{\lambda}_k(z)+c)$, $k \in \mathbb{N}$. Für die Eigenwerte $\lambda_{\tilde{A},k} = \lambda_{\tilde{A},k}(z) = 1 - \lambda_{\bar{A},k}(z)$ $(k \in \mathbb{N})$ gilt $\lambda_{\tilde{A},k} = c/(\bar{\lambda}_k+c)$ und somit

$$c^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{\tilde{A},k}(z) = \int_0^1 \mathrm{Tr}\, G_c(z;s,s)\,ds, \tag{8.57}$$

wobei $G_c(z;s,\tau)$ $(0 \leq s,\tau \leq 1)$ die Green'sche Matrix des Differentialoperators $L_c(z)$ ist. G_c ist $\mathcal{C}^\infty$ bzgl. z und die Summe auf der linken Seite von (8.57) konvergiert gleichmäßig gegen die rechte Seite. A(z) ist somit ein nuklearer Operator auf H [78]. Es bezeichne B_n den Banachraum aller nuklearen Operatoren auf H, d.h. $A(z) \in B_n$. Da alle $\lambda_{\tilde{A},k}$ positiv sind, gilt $\mathrm{Tr}\tilde{A}(z) = \|A(z)\|_{B_n}$ und somit

$$\|A(z)\|_{B_n} = c\int_0^1 G_c(z;s,s)\,ds. \tag{8.58}$$

Da die rechte Seite von (8.58) $\mathcal{C}^\infty$ ist bzgl. z und die Summe in (8.57) gleichmäßig gegen die rechte Seite konvergiert, ist die Abbildung $z \longrightarrow \tilde{A}(z) \in B_n$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbil-

dung. Bezeichne mit E den abgeschlossenen Teilraum E:=(1-P)H von H, wobei P die endlich dimensionale Projektion $Pv:=\sum_{j=1}^{M'}(v,v_j)v_j$ $(v\in H)$ ist, und setze $\tilde{A}_E(z):=(1-P)\tilde{A}(z)|_E$. $\hat{B}_n$ sei der Banachraum aller nuklearen Operatoren auf E. Dann ist $\tilde{A}_E(z)\in\hat{B}_n$ und die Abbildung $z\to\tilde{A}_E(z)$ ist ebenfalls $\mathcal{C}^\infty$. Für Operatoren auf E der Form 1-T, $T\in\hat{B}_n$, ist die Determinante als Grenzwert einer Folge von Determinanten endlich dimensionaler Operatoren wohldefiniert und die Abbildung $\det:\hat{B}_n\to\mathbb{R}$, $T\to\det(1-T)$ $(T\in\hat{B}_n)$ ist eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung [78]. Daraus folgt, daß das unendliche Produkt

$$\prod_{k=M'+1}^{\infty}\mu_k(z)/(\mu_k(z)+c)=\det\left[1-\tilde{A}_E(z)\right]=:\tilde{F}_1(z) \tag{8.59}$$

gleichmäßig gegen eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $\tilde{F}_1(z)$ konvergiert.

(2) Definiere die NxN-Matrix $Z^N=Z^N(z)$ durch

$$Z^N_{ij}(z):=(L_c(z)v_i,v_j)\ ,\quad 1\leq i,j\leq N,\ N>M'.$$

Anwendung von Lemma 8.1 auf Z^N ergibt im Limes $N\to\infty$:

$$\left[\prod_{j=1}^{M'}1/(\bar{\lambda}_j(z)+c)\right]\left[\prod_{k=M'+1}^{\infty}(\mu_k(z)+c)/(\bar{\lambda}_k(z)+c)\right]=\det J^c(z) \tag{8.60}$$

mit der M'xM'-Matrix $J^c_{ij}(z):=(\mathcal{G}_c(z)v_i,v_j)$ $(1\leq i,j\leq M')$. Da die Abbildungen $z\to\tilde{A}(z)\in B_n$, $z\to\tilde{A}_E(z)\in\hat{B}_n$ $\mathcal{C}^\infty$ sind, konvergiert das Produkt auf der linken Seite von (8.60) gleichmäßig gegen die $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf der rechten Seite. Durch Multiplikation der linken und rechten Seiten von (8.59) und (8.60) erhält man

$$\left[\prod_{j=1}^{M'}1/(\bar{\lambda}_j(z)+c)\right]\left[\prod_{k=M'+1}^{\infty}\mu_k(z)/(\bar{\lambda}_k(z)+c)\right]=\tilde{F}_1(z)\det J^c(z), \tag{8.61}$$

und das Produkt auf der linken Seite von (8.61) konvergiert gleichmäßig gegen die $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf der rechten Seite.

(3) Nach Theorem 8.1 konvergiert das Produkt

$$\prod_{k=1}^{\infty}(\bar{\lambda}_k(z)+c)/\lambda^0_k(\mathfrak{G}_1)=:\tilde{F}_2(z) \tag{8.62}$$

gleichmäßig gegen eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $\tilde{F}_2(z)$. Durch Multiplikation der linken und rechten Seiten von (8.61) und (8.62) erhält man

$$\left[\prod_{j=1}^{M'}1/\lambda^0_j(\mathfrak{G}_1)\right]\left[\prod_{k=M'+1}^{\infty}\mu_k(z)/\lambda^0_k(\mathfrak{G}_1)\right]=\tilde{F}_1(z)\tilde{F}_2(z)\det J^c(z), \tag{8.63}$$

wobei das Produkt auf der linken Seite gleichmäßig gegen die $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf der rechten Seite konvergiert. □

Es seien $\tilde{U}_i(s,z)\in\mathcal{M}(M,M)$ (i=1,2) die Lösungsmatritzen der Differentialgleichung $0=L(z)\tilde{U}_i(s,z)$ mit Anfangsbedingungen $\tilde{U}_2(0,z)=\tilde{V}_1(0,z)=0$, $\tilde{U}_1(0,z)=\tilde{V}_2(0,z)=E_M$, wobei

$$\tilde{V}_i(s,z):=\hat{W}(\mathfrak{G}_1;s)\tilde{U}_i'(s,z)+\hat{R}(y,\mathfrak{G};s)\tilde{U}_i(s,z)\quad(i=1,2,\ ':=\tfrac{d}{ds}\ ).$$

Setze $\tilde{U}^0_i(s):=\tilde{U}_i(s,0)$ und $C_i:=\tilde{U}^0_i(1)$, $D_i:=\tilde{V}^0_i(1)$ (i=1,2). Analog zu (8.13) läßt sich zeigen, daß

$$D_2C_1^T - D_1C_2^T = E_M \tag{8.64a}$$

$$C_1C_2^T - C_2C_1^T = 0 \tag{8.64b}$$

$$D_2^TC_2 - C_2^TD_2 = 0\,. \tag{8.64c}$$

Da $L(0)=L_0$ gilt, wobei L_0 der durch Gleich. (7.16) definierte Differentialoperator ist, besitzt die Matrix C_2 einen M'-dimensionalen Kern. Es sei $\{b^1,\ldots,b^{M'}\}$ eine Basis von $KerC_2$ und $\{\tilde{c}^1,\ldots,\tilde{c}^{M'}\}$ eine Basis von $KerC_2^T$ ($b^j,\tilde{c}^j\in\mathbb{R}^M$). Anwendung von (8.64b) ergibt $C_1^T\tilde{c}^j=\sum_{k=1}^{M'}\bar{C}_{jk}b^k$ mit einer M'xM'-Matrix $\bar{C}=\{\bar{C}_{jk}\}_{1\leq j,k\leq M'}$ und mit (8.64a) folgt, daß $\bar{C}$ regulär ist. Setzt man daher

$$c^j := \sum_{k=1}^{M'}(\bar{C}^{-1})_{jk}\tilde{c}^k,$$

so ist $\{c^1,\ldots,c^{M'}\}$ ebenfalls Basis von $KerC_2^T$ und es gilt $C_1^Tc^j=b^j$ ($1\leq j\leq M'$). Analog folgt mit (8.64c) und (8.64a), daß $D_2b^j = c^j$ ($1\leq j\leq M'$). Wir nennen $\{c^1,\ldots,c^{M'}\}$ die zu $\{b^1,\ldots,b^{M'}\}$ bzgl. C_1^T duale Basis von $KerC_2^T$. Das nächste Theorem liefert einen expliziten Ausdruck für $\tilde{F}(z)$:

Theorem 8.3. (1) Für $z=\bar{z}=(\bar{y},\bar{\mathfrak{b}},\bar{a})$ ($\bar{\mathfrak{b}}=(\bar{\mathfrak{b}}_1,\ldots)$) sei $\tilde{U}_2(1,\bar{z})$ regulär. Dann gilt:

$$\tilde{F}(\bar{z}) = \det\left[\tilde{U}_2(1,\bar{z})\tilde{G}(\bar{z})\tilde{W}^{-1}(\bar{\mathfrak{b}}_1)\right], \tag{8.65}$$

wobei

$$\tilde{W}(\mathfrak{b}_1) := \int_0^1\hat{W}^{-1}(\mathfrak{b}_1;s)ds\,,$$

und die symmetrische M'xM'-Matrix $\tilde{G}(\bar{z})$ durch die zu $L(\bar{z})$ assoziierte Green'sche Matrix $G(\bar{z};s,\tau)$ ($0\leq s,\tau\leq 1$) definiert ist,

$$\tilde{G}_{ij}(\bar{z}) := \int_0^1\int_0^1 v_i^T(s)G(\bar{z};s,\tau)v_j(\tau)dsd\tau,\quad 1\leq i,j\leq M'. \tag{8.66}$$

(2) Es sei $1\leq M'< M$. $\{b^1,\ldots,b^{M'}\}$ sei eine Basis von $KerC_2$ und $\{c^1,\ldots,c^{M'}\}$ die zu $\{b^1,\ldots,b^{M'}\}$ bzgl. C_1^T duale Basis von $KerC_2^T$. $\{b^1,\ldots,b^{M'}\}$, bzw. $\{c^1,\ldots,c^{M'}\}$ seien durch linear unabhängige Vektoren $\{b^{M'+1},\ldots,b^M\}$, bzw. $\{c^{M'+1},\ldots,c^M\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^M$ ergänzt und B, bzw. C sei die reguläre MxM-Matrix, deren Spalten von den b^i, bzw. c^i ($1\leq i\leq M$) gebildet werden. Dann gilt:

$$\tilde{F}(0) = (-1)^{M'}(\det\bar{C}_2)(\det\bar{A})/\det\left[C^TB\tilde{W}(0)\right],\quad 1\leq M'< M, \tag{8.67a}$$

wobei die regulären Matritzen $\bar{C}_2\in\mathcal{M}(M-M',M-M')$, $\bar{A}\in\mathcal{M}(M',M')$ definiert sind durch

$$\bar{C}_{2,ij} := c^{iT}C_2b^j\,,\quad M'+1\leq i,j\leq M, \tag{8.68a}$$

$$\bar{A}_{ij} := b^{iT}Ab^j\,,\quad 1\leq i,j\leq M', \tag{8.68b}$$

mit der positiv definiten und symmetrischen MxM-Matrix A,

$$A := \int_0^1\tilde{U}_2^{oT}(s)\tilde{U}_2^o(s)ds. \tag{8.68c}$$

(3) Für M'=M gilt

$$\tilde{F}(0) = (-1)^M(\det A)/\det(D_2W(0)),\quad M'=M. \tag{8.67b}$$

Beweis: (1) Da $\tilde{U}_2(1,\bar{z})$ regulär ist, existiert zu $L(\bar{z})$ die Green'sche Matrix $G(\bar{z};s,\tau)$ $(0\leq s,\tau\leq 1)$ und ist nach (8.16b) gegeben durch

$$G(\bar{z};s,\tau) = -\tilde{U}_2(s,\bar{z})\tilde{U}_2^{-1}(1,\bar{z})\tilde{U}_1(1,\bar{z})\tilde{U}_2^{T}(\tau,\bar{z}) + \begin{cases}\tilde{U}_1(s,\bar{z})\tilde{U}_2^{T}(\tau,\bar{z}) & , 0\leq\tau\leq s\leq 1\\ \tilde{U}_2(s,z)\tilde{U}_1^{T}(\tau,z) & , 0\leq s\leq\tau\leq 1\end{cases}. \quad (8.69)$$

Die NxN-Matrix Z^N, $Z^N_{ij}:=(L(\bar{z})v_i,v_j)$ $(1\leq i,j\leq N,\ N>M')$ ist somit für große N regulär. Setze

$$Z^N = \begin{bmatrix} Z_0^N & Z_1^{NT} \\ Z_1^N & Z_2^N \end{bmatrix}$$

mit $Z_0^N\in\mathcal{M}(M',M')$, $Z_1^N\in\mathcal{M}(N-M',M')$, $Z_2^N\in\mathcal{M}(N-M',N-M')$. Nach Lemma 8.1 gilt, daß

$$\det Z_2^N/\det Z^N = \det\tilde{Z}_0^N , \quad (8.70)$$

wobei $\tilde{Z}_0^N$ die obere linke M'xM'-Untermatrix von $(Z^N)^{-1}$ ist. Im Limes $N\to\infty$ wird aus (8.70)

$$\Big[\prod_{j=1}^{M'} 1/\bar{\lambda}_j(\bar{z})\Big]\Big[\prod_{k=M'+1}^{\infty}\mu_k(\bar{z})/\bar{\lambda}_k(\bar{z})\Big] = \det\tilde{G}(\bar{z}) . \quad (8.71)$$

Andrerseits gilt nach Theorem 8.1, daß

$$\prod_{k=1}^{\infty}(\bar{\lambda}_k(\bar{z})/\lambda_k^0(\bar{\varepsilon}_1)) = \frac{\det U(1,\bar{z})}{\det U_0(1,\bar{\varepsilon}_1)} , \quad (8.72)$$

wobei $U(s,z)$ Lösungsmatrix von $L(z)U(s,z)=0$ und $U_0(s,\varepsilon_1)$ Lösungsmatrix von $\hat{L}_0(\varepsilon_1)U_0(s,\varepsilon_1)=0$ ist mit Anfangsbedingungen $U(0,z)=U_0(0,\varepsilon_1)=0$, $U'(0,z)=U_0'(0,\varepsilon_1)=E_M$. Gleich. (8.65) folgt durch Multiplikation der linken und rechten Seiten von (8.71) und (8.72) unter Verwendung von $U(s,z)=\tilde{U}_2(s,z)\hat{W}(\varepsilon_1;0)$ und

$$U_0(s,\varepsilon_1) = \int_0^s \hat{W}^{-1}(\varepsilon_1,\tau)d\tau\hat{W}(\varepsilon_1,0).$$

(2) Der zweite Teil des Theorems (Gleich. (8.67a)) wird durch eine Limesbildung bewiesen: Setze $\hat{L}(a):=L(0,0,a)=L_0+a$ und $\hat{U}_i(s,a):=\tilde{U}_i(s,z=(0,0,a))$ $(i=1,2)$. $\hat{U}_2(s,a)$ wird in eine Taylorreihe bzgl. a entwickelt,

$$\hat{U}_2(s,a) = \tilde{U}_2^0(s) + a\bar{U}(s) + o(a). \quad (8.73)$$

Nullsetzen der Koeffizienten erster Ordnung von a in der Gleichung $\hat{L}(a)\hat{U}_2(s,a)=0$ ergibt, daß $\bar{U}(s)$ Lösung von $L_0\bar{U}(s)=-\tilde{U}_2^0(s)$ ist mit Anfangsbedingungen $\bar{U}(0)=\bar{U}'(0)=0$, d.h. es gilt nach der Formel der Variation der Konstanten, daß

$$\bar{U}(1) = C_2A_1 - C_1A, \quad (8.74)$$

wobei

$$A_1 := \int_0^1 \tilde{U}_1^{0T}(s)\tilde{U}_2^0(s)ds.$$

Es sei $1\leq M'<M$. Für die $v_i(s)$ $(1\leq i\leq M')$ gilt $v_i(s)=\tilde{U}_2^0(s)b_0^i$ mit einer Basis $\{b_0^1,\ldots,b_0^{M'}\}$ von $\mathrm{Ker}C_2$, die so bestimmt ist, daß

$$b_0^{iT}Ab_0^j = \delta_{ij},\ 1\leq i,j\leq M'.$$

Da A symmetrisch und positiv definit ist, kann $\{b_o^1,\ldots,b_o^{M'}\}$ durch linear unabhängige Vektoren $\{b_o^{M'+1},\ldots,b_o^M\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^M$ ergänzt werden, so daß $B_o^TAB_o=E_M$, wobei B_o die reguläre MxM-Matrix ist, deren Spalten von den b_o^i, $1\leq i\leq M$, gebildet werden. $\{c_o^1,\ldots,c_o^{M'}\}$ sei die zu $\{b_o^1,\ldots,b_o^{M'}\}$ bzgl. C_1^T duale Basis von $\mathrm{Ker}C_2^T$ und werde von linear unabhängigen Vektoren $\{c_o^{M'+1},\ldots,c_o^M\}$ ebenfalls zu einer Basis von $\mathbb{R}^M$ ergänzt. Die reguläre MxM-Matrix, deren Spalten von den c_o^i ($1\leq i\leq M$) gebildet werden, wird mit C_o bezeichnet. Man überzeugt sich leicht von der Gültigkeit folgender Beziehungen:

$$C_o^TC_1(B_o^T)^{-1} = \begin{bmatrix} E_{M'} & 0 \\ \tilde{C}_1 & \hat{C}_1 \end{bmatrix} \tag{8.75a}$$

$$C_o^TC_2B_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_2^o \end{bmatrix}, \tag{8.75b}$$

wobei $\tilde{C}_1\in\mathcal{M}(M-M',M')$, $\hat{C}_1\in\mathcal{M}(M-M',M-M')$ und $\bar{C}_2^o$ die reguläre $(M-M')$x$(M-M')$-Matrix, definiert durch $\bar{C}_{2,ij}^o=c_o^{iT}C_2b_o^j$ ($M'+1\leq i,j\leq M$) ist. Multiplikation von (8.74) mit C_o^T von links und mit B_o von rechts ergibt

$$C_o^T\bar{U}(1)B_o = \begin{bmatrix} -E_{M'} & 0 \\ & \bar{U}_C \end{bmatrix} \tag{8.75c}$$

mit $\bar{U}_C\in\mathcal{M}(M-M',M')$. Aus (8.73) und (8.75b,c) folgt, daß

$$\det\hat{U}_2(1,a) = (-1)^{M'}a^{M'}\left[\det(C_o^{-1}B_o^{-1})\right]\left[\det\bar{C}_2^o\right] + o(a^{M'}), \tag{8.76}$$

d.h. $\hat{U}_2(1,a)$ ist für kleine, aber von Null verschiedene a regulär. Es seien $\tilde{C}(a)=C_o+a\hat{C}+o(a)$ und $\tilde{B}(a)=B_o+a\hat{B}+o(a)$ reguläre MxM-Matritzen, so daß

$$\tilde{C}^T(a)\hat{U}_2(1,a)\tilde{B}(a) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_2(a) & 0 \\ 0 & \hat{C}_2(a) \end{bmatrix} \tag{8.77}$$

mit $\tilde{C}_2(a)\in\mathcal{M}(M',M')$, $\hat{C}_2(a)\in\mathcal{M}(M-M',M-M')$. Entwicklung von (8.77) nach Potenzen von a und Vergleich der Terme erster und nullter Ordnung in a ergibt $\hat{C}_2(a)=\bar{C}_2^o+\hat{C}_2^1(a)$ mit $\hat{C}_2^1(0)=0$ und $\tilde{C}_2(a)=-aE_{M'}+o(a)$. Daraus folgt für kleine $a\neq0$, daß

$$\hat{U}_2^{-1}(a) = \tilde{B}(a)\begin{bmatrix} -(E_{M'}+\tilde{C}_2^1(a))/a & 0 \\ 0 & (\bar{C}_2^o)^{-1}+\bar{C}_2^1(a) \end{bmatrix}\tilde{C}^T(a), \tag{8.78}$$

wobei $\tilde{C}_2^1(0)=0$ und $\bar{C}_2^1(0)=0$. Für $a\neq0$ existiert daher die Green'sche Matrix (8.69) ($\bar{z}=(0,0,a)$, $a\neq0$), es kann somit (8.65) benützt werden und und anschließend der Grenzübergang $a\longrightarrow0$ vollzogen werden. Für die Matrix $\tilde{G}(a):=\tilde{G}(\bar{z}=(0,0,a)$ ergibt sich mit (8.66), (8.69) und (8.78):

$$\tilde{G}_{ij}(a) = -b_o^{iT}A_2(a)\tilde{B}(a)\begin{bmatrix} -\left[E_{M'}+\tilde{C}_2^1(a)\right]/a & 0 \\ 0 & (\bar{C}_2^o)^{-1}+\bar{C}_2^1(a) \end{bmatrix} \tag{8.79}$$

$$\times\,\tilde{C}^T(a)\hat{U}_1(1,a)(B_o^T)^{-1}B_o^TA_2^T(a)b_o^j + b_o^{iT}\{\ldots\}b_o^j \quad (1\leq i,j\leq M'),$$

wobei der Ausdruck in der geschweiften Klammer durch den zweiten Term auf der rechten Seite von (8.69) bestimmt ist und $A_2(a)$ definiert ist durch

$$A_2(a) := \int_0^1 \tilde{U}_2^{oT}(s)\hat{U}_2(s,a)ds.$$

Aus (8.79) folgt mit (8.75) und $B_o^T A B_o = E_M$, $A_2(0)=A$, daß

$$\det\tilde{G}(a) = a^{-M'}(1 + \tilde{f}(a)) \tag{8.80}$$

mit einer Funktion $\tilde{f}(a)$, $\tilde{f}(0)=0$. (Der Ausdruck in der geschweiften Klammer in (8.79) liefert nur einen Beitrag zu $\tilde{f}(a)$ und wurde daher nicht explizit angegeben.) Aus (8.65), (8.76) und (8.80) ergibt sich

$$\tilde{F}(0) = \lim_{a\to o}\{\det \hat{U}_2(1,a)\tilde{G}(a)\tilde{W}^{-1}(0)\} = (-1)^{M'}(\det C_2^o)/\det[C_o^T B_o \tilde{W}(0)]. \tag{8.81}$$

Wegen der Regularität der Matritzen C_o, B_o, C_2^o, $\tilde{W}(0)$ ist $\tilde{F}(0)$ von Null verschieden. Es sei nun $\{b^1,\ldots,b^{M'}\}$ eine beliebige Basis von $\mathrm{Ker}C_2$ und $\{c^1,\ldots,c^{M'}\}$ sei die zu $\{b^1,\ldots,b^{M'}\}$ bzgl. C_1^T duale Basis von $\mathrm{Ker}C_2^T$. $\{b^1,\ldots,b^{M'}\}$, bzw. $\{c^1,\ldots,c^{M'}\}$ seien durch linear unabhängige Vektoren $\{b^{M'+1},\ldots,b^M\}$, bzw. $\{c^{M'+1},\ldots,c^M\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^M$ ergänzt und B, bzw. C sei die reguläre MxM-Matrix, deren Spalten von den b^i, bzw. c^i $(1\leq i\leq M)$ gebildet werden. Dann folgt, daß

$$B = B_o\begin{bmatrix} R_o & R_1 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}, \quad C = C_o\begin{bmatrix} R_o & \tilde{R}_1 \\ 0 & \tilde{R}_2 \end{bmatrix} \tag{8.82}$$

mit einer regulären M'xM'-Matrix R_o, regulären (M-M')x(M-M')-Matritzen $R_2,\tilde{R}_2$ und $R_1,\tilde{R}_1 \in \mathcal{M}(M',M-M')$. Es gilt

$$\det(C_o^{-1}B_o^{-1}) = (\det R_o)^2(\det(R_2\tilde{R}_2))/\det(C^TB) \tag{8.83a}$$

$$\det\bar{C}_2^o = (\det\bar{C}_2)/\det(R_2\tilde{R}_2)\ , \tag{8.83b}$$

wobei die reguläre (M-M')x(M-M')-Matrix $\bar{C}_2$ durch (8.68a) definiert ist. Da außerdem aus $B_o^TAB_o=E_M$ folgt, daß

$$\det\bar{A} = (\det R_o)^2, \tag{8.83c}$$

wobei $\bar{A}$ durch (8.68b) definiert ist, ergibt sich (8.67a) aus (8.81) und (8.83). Eine zur Herleitung von (8.83) analoge Überlegung zeigt, daß der Ausdruck (8.67a) unabhängig von der speziellen Wahl von $\{b^1,\ldots,b^{M'}\}$ und $\{b^{M'+1},\ldots,b^M\}$, bzw. $\{c^{M'+1},\ldots,c^M\}$ ist.

(3) Der Beweis von Gleich. (8.67b) verläuft analog zum Beweis von Gleich. (8.67a) unter Verwendung der Tatsache, daß für M'=M C_2=0 gilt und C_1, D_2 regulär sind mit $D_2^T=C_1^{-1}$. □

Corrollar. Es sei $1\leq M'< M$ und $\{b^1,\ldots,b^{M'},b^{M'+1},\ldots,b^M\}$ sei eine Basis von $\mathbb{R}^M$, so daß $\{b^1,\ldots,b^{M'}\}$ Basis von $\mathrm{Ker}C_2$. $\{c^1,\ldots,c^{M'}\}$ sei die zu $\{b^1,\ldots,b^{M'}\}$ bzgl. C_1^T duale Basis von $\mathrm{Ker}C_2^T$ und $\{\tilde{b}^1,\ldots,\tilde{b}^{M'},\tilde{b}^{M'+1},\ldots,\tilde{b}^M\}$ sei die Dualbasis von $\{b^1,\ldots,b^M\}$, definiert durch $\tilde{b}^{iT}b^j=\delta_{ij}$ $(1\leq i,j\leq M)$. Die M'xM'-Matrix mit Komponenten $c^{iT}b^j$ $(1\leq i,j\leq M')$ sei regulär, $\tilde{X}\in\mathcal{M}(M-M',M-M')$ sei durch $\tilde{X}_{ij}=\tilde{b}^{iT}C_2b^j$ $(M'+1\leq i,j\leq$

M) und $\mathcal{X}\in\mathcal{M}(M',M')$ durch $\mathcal{X}_{ij}=b^{iT}D_2b^j$ $(1\leqslant i,j\leqslant M)$ definiert. Dann sind $\mathcal{X}$ und $\tilde{\mathcal{X}}$ regulär und es gilt

$$\tilde{F}(0) = (-1)^{M'}(\det\tilde{\mathcal{X}})(\det\tilde{W}(0))/\det(\bar{A}\mathcal{X}^{-1}). \tag{8.84}$$

Beweis: Setze $c^i:=\tilde{b}^i$ für $M'+1\leqslant i\leqslant M$ und bezeichne die MxM-Matrix, deren Spalten von den c^i $(1\leqslant i\leqslant M)$ gebildet werden mit C. Dann gilt $\det(C^TB)=\det[\{c^{iT}b^j\}_{1\leqslant i,j\leqslant M'}]$, wobei B die MxM-Matrix ist, deren Spalten von den b^i $(1\leqslant i\leqslant M)$ gebildet werden. C ist regulär, es kann somit Gleich. (8.67a) mit $C_2=\tilde{\mathcal{X}}$ verwendet werden. Wegen $D_2b^j=c^j$ $(1\leqslant j\leqslant M')$ gilt $\det(C^TB)=\det\mathcal{X}$ und damit folgt bereits (8.84) aus (8.67a). □

Gleich. (8.84) wurde in [79] für Teilchen in einem äußeren Potential abgeleitet.

Die Matritzen C_2,D_2,C_1,A sind durch die Lösungen des zu der Euler-Lagrange-Gleichung (7.3) korrespondierenden Anfangswertproblems bestimmt: Es sei $q(t;t_1,q_1,\dot{q}_1)$ die Lösung von (7.3) mit Anfangsbedingungen $q(t_1;t_1,q_1,\dot{q}_1)=q_1$, $\dot{q}(t_1;t_1,q_1,\dot{q}_1)=\dot{q}_1$ und es gelte $q_o(t)=q(t;t_1^o,q_1^o,\dot{q}_1^o)$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\dot{q}_1^o$. Die MxM-Matritzen $Q_i(t)$ $(i=1,2)$ seien definiert durch

$$Q_{1,kj}(t) := \frac{\partial}{\partial q_{1j}}\, q_k(t;t_1^o,q_1^o,\dot{q}_1^o) \quad (1\leqslant k,j\leqslant M), \tag{8.85a}$$

$$Q_{2,kj}(t) := \frac{\partial}{\partial q_{1j}}\, q_k(t;t_1^o,q_1^o,\dot{q}_1^o) \quad (1\leqslant k,j\leqslant M), \tag{8.85b}$$

und sind daher Lösungsmatritzen der um $q_o(t)$ linearisierten Euler-Lagrange-Gleichung mit Anfangsbedingungen $Q_2(t_1^o)=\dot{Q}_1(t_1^o)=0$, $\dot{Q}_2(t_1^o)=Q_1(t_1^o)=E_M$. Setzt man daher

$$U_2^o(s) := Q_2(t_1^o+s\Delta t_o)/\Delta t_o\ ,\quad U_1^o(s) := Q_1(t_1^o+s\Delta t_o)\ ,\quad (\Delta t_o:=t_2^o-t_1^o),$$

so genügen die $U_i^o(s)$ der Differentialgleichung $L_oU_i^o(s)=0$ mit Anfangsbedingungen $U_2^o(0)=U_1^{o\prime}(0)=0$, $U_2^{o\prime}(0)=U_1^o(0)=E_M$, woraus sofort folgt, daß $\tilde{U}_2^o(s)=U_2^o(s)\hat{W}^{-1}(0;0)$ und somit

$$C_2 = Q_2(t_2^o)W^{-1}(t_1^o)/\Delta t_o\ . \tag{8.86a}$$

Analog erhält man

$$C_1 = Q_1(t_2^o) - Q_2(t_2^o)W^{-1}(t_1^o)\bar{R}(t_1^o) \tag{8.86b}$$

$$D_2 = W(t_2^o)\dot{Q}_2(t_2^o)W^{-1}(t_1^o) + \bar{R}(t_2^o)Q_2(t_2^o)W^{-1}(t_1^o) \tag{8.86c}$$

$$A = W^{-1}(t_1^o)\int_{t_1^o}^{t_2^o} Q_2^T(t)Q_2(t)dtW^{-1}(t_1^o)/(\Delta t_o)^3\ , \tag{8.86d}$$

wobei $\bar{R}(t)\in\mathcal{M}(M,M)$ definiert ist durch $\bar{R}_{ij}(t):=\partial R_i(q_o(t),t)/\partial q_j$ $(1\leqslant i,j\leqslant M)$.

Da $\tilde{F}(0)\neq 0$ gilt, ist die Funktion

$$F(y,\mathfrak{G}) := [\tilde{F}(z=(y,\mathfrak{G},0))\det\tilde{W}(\mathfrak{G}_1)]^{-1} \tag{8.87}$$

für $(y,\mathfrak{G})$ in einer Umgebung von $(y,\mathfrak{G})=(0,0)$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion. Im folgenden Lemma wird die Determinante der MxM-Matrix $\bar{U}_2(s;y,\mathfrak{G}):=\tilde{U}_2(s,z=(y,\mathfrak{G},0))$ an der Stelle s=1 durch die Determinante der M'xM'-Matrix $g^{(2)}(y,\mathfrak{G}):=\{\partial^2 g(y,\mathfrak{G})/\partial y_i\partial y_j\mid 1\leqslant i,j\leqslant M'\}$ und F ausgedrückt:

Lemma 8.2. Es gilt

$$\det g^{(2)}(y,\mathfrak{E}) = F(y,\mathfrak{E})\det\bar{U}_2(1;y,\mathfrak{E}). \tag{8.88}$$

Beweis: Setze $\hat{h}_i(y,\mathfrak{E})\equiv\hat{h}_i(y,\mathfrak{E};s):=\partial h(y,\mathfrak{E};s)/\partial y_i \in E$ $(1\leq i\leq M')$. Für die $\hat{h}_i$ gilt (vgl. Gleich. (2.63) und (2.65)), daß

$$(\hat{L}(y,\mathfrak{E})v_k,\hat{h}_i(y,\mathfrak{E})) = -(\hat{L}(y,\mathfrak{E})v_k,v_i),\ 1\leq i\leq M',\ k\geq M'+1, \tag{8.89a}$$

$$\hat{L}(y,\mathfrak{E})[v_i+\hat{h}_i(y,\mathfrak{E})] = \sum_{j=1}^{M'} g_{ij}^{(2)}(y,\mathfrak{E})v_j,\quad 1\leq i\leq M', \tag{8.89b}$$

bzw.

$$(\hat{L}(y,\mathfrak{E})v_j,v_i+\hat{h}_i(y,\mathfrak{E})) = g_{ij}^{(2)}(y,\mathfrak{E}),\quad 1\leq i,j\leq M'. \tag{8.89c}$$

Die NxN-Matritzen $Z^N(y,\mathfrak{E})$, $Y^N(y,\mathfrak{E})$, $N>M'$, seien definiert durch $Z^N_{ij}(y,\mathfrak{E}) := (\hat{L}(y,\mathfrak{E})v_i,v_j)$ $(1\leq i,j\leq N)$ und

$$Y^N_{ij}(y,\mathfrak{E}) := \begin{cases} \delta_{ij} \text{ für } (1\leq i\leq N,\ 1\leq j\leq M') \text{ und } (M'+1\leq i,j\leq N), \\ (\hat{h}_i(y,\mathfrak{E}),v_j) \text{ für } (1\leq i\leq M',\ M'+1\leq j\leq N). \end{cases}$$

Für $\hat{Z}^N(y,\mathfrak{E}):=Y^{NT}(y,\mathfrak{E})Z^N(y,\mathfrak{E})Y^N(y,\mathfrak{E})$ erhält man

$$\begin{aligned}\hat{Z}^N_{ij} = (\hat{L}v_i,v_j)+\sum_{l=M'+1}^{N}(\hat{h}_i,v_l)(\hat{L}v_l,v_j)+\sum_{l=M'+1}^{N}\Big[(\hat{L}v_i,v_l)(\hat{h}_j,v_l) \\ +\sum_{k=M'+1}^{N}(\hat{h}_i,v_l)(\hat{L}v_l,v_k)(\hat{h}_j,v_k)\Big] \text{ für } 1\leq i,j\leq M',\end{aligned} \tag{8.90a}$$

$$\hat{Z}^N_{ik} = \hat{Z}^N_{ki} = (\hat{L}v_i,v_k)+\sum_{l=M'+1}^{N}(\hat{h}_i,v_l)(\hat{L}v_l,v_k) \text{ für } 1\leq i\leq M',\ M'+1\leq k\leq N, \tag{8.90b}$$

$$\hat{Z}^N_{kl} = (\hat{L}v_k,v_l) \text{ für } M'+1\leq k,l\leq N. \tag{8.90c}$$

Beachtet man, daß $\hat{h}_i=\sum_{k=M'+1}^{\infty}(\hat{h}_i,v_k)v_k$, so folgt mit (8.89) und (8.90) im Limes $N\longrightarrow\infty$, daß

$$\hat{Z}^N_{ij}(y,\mathfrak{E})\longrightarrow g_{ij}^{(2)}(y,\mathfrak{E})\ (N\longrightarrow\infty) \text{ für } 1\leq i,j\leq M', \tag{8.91a}$$

$$\hat{Z}^N_{ik}(y,\mathfrak{E}) = \hat{Z}^N_{ki}(y,\mathfrak{E})\longrightarrow 0\ (N\longrightarrow\infty) \text{ für } 1\leq i\leq M',\ M'+1\leq k\leq N. \tag{8.91b}$$

Definiert man daher die NxN-Matrix $\bar{Z}^N(\mathfrak{E}_1)$ durch

$$\bar{Z}^N_{ij}(\mathfrak{E}_1) := \int_0^1\int_0^1 v_i^T(s)G_0(\mathfrak{E}_1;s,\tau)v_j(\tau)ds d\tau,\quad 1\leq i,j\leq N,$$

wobei $G_0(\mathfrak{E}_1;s,\tau)$ die Green'sche Matrix des Differentialoperators $\hat{L}_0(\mathfrak{E}_1)$ ist, so ergibt sich mit (8.91) und $\det Y^N(y,\mathfrak{E})=1$, daß

$$\lim_{N\to\infty}\det\left[\bar{Z}^N(\mathfrak{E}_1)Z^N(y,\mathfrak{E})\right] = \prod_{k=1}^{\infty}\hat{\lambda}_k(y,\mathfrak{E})/\lambda_k^0(\mathfrak{E}_1) = \tilde{F}(z=(y,\mathfrak{E},0))\det g^{(2)}(y,\mathfrak{E}), \tag{8.92}$$

wobei die $\hat{\lambda}_k(y,\mathfrak{E}):=\bar{\lambda}_k(z=(y,\mathfrak{E},0))$ $(k\in\mathbb{N})$ die Eigenwerte von $\hat{L}(y,\mathfrak{E})$ sind. Gleich. (8.88) folgt mit Theorem 8.1 aus (8.92) und (8.87). □

Mit Hilfe von Lemma 8.2 wird noch eine weitere Beziehung (Gleich. (8.95))abgeleitet, die für die semiklassische Approximationsformel relevant ist: Es sei $y=\bar{y}(\xi)$ eine Lösung der Gleichung $\nabla_y g(y,\xi)=0$ und für ξ in einer Umgebung von $\xi=\bar{\xi}$ gelte, daß $\det g^{(2)}(\bar{y}(\xi),\xi)\neq 0$. Durch $\bar{y}(\xi)$ ist ein eindeutiger klassischer Weg $q_c(t;P_1,P_2)$ ($\xi=(P_1-P_1^o,P_2-P_2^o)$) bestimmt. Setze

$$\hat{\vartheta}(y,\xi)\equiv\hat{\vartheta}(y,\xi;s) := \hat{u}(s;P_1,P_2)+\sum_{j=1}^{M'} y_j v_j(s)+h(y,\xi;s), \tag{8.93}$$

wobei $\hat{u}$ durch (7.8a) definiert ist. Dann gilt mit Gleich. (7.26), daß

$$q_c(t;P_1,P_2) = \hat{\vartheta}(\bar{y}(\xi),\xi;(t-t_1)/\Delta t),$$

und aus Gleich. (7.23) folgt für die Hamilton'sche Principalfunktion:

$$S^c(P_1,P_2) := S_{P_1P_2}[q_c(t;P_1,P_2)] = [S^*(\xi,0)+g(\bar{y}(\xi),\xi)]/\Delta t \tag{8.94}$$

Im folgenden Lemma wird die Van Vleck-Determinante von S^c durch $\det g^{(2)}$ und F ausgedrückt:

Lemma 8.3. Es gilt

$$\det\partial^2 S^c(P_1,P_2)/\partial q_1\partial q_2 = (-\Delta t)^{-M}F(\bar{y}(\xi),\xi)\det g^{(2)}(\bar{y}(\xi),\xi). \tag{8.95}$$

Beweis: Für Funktionen $u(s)\in\mathbb{R}^M$ $(0\leq s\leq 1)$ mit beliebigen Randwerten $u(0),u(1)$ wird das Funktional $\bar{S}$ definiert durch

$$\bar{S}[\xi_1;u(s)] := \int_0^1 \bar{\mathcal{L}}(\xi_1;u(s),u'(s),s)ds, \tag{8.96}$$

wobei

$$\bar{\mathcal{L}}(\xi_1;u,u',s) := \tfrac{1}{2}u'^T\hat{W}(\xi_1;s)u'+\sum_{i=1}^{M}\tilde{R}_i(\xi_1,u,s)u_i'-\bar{V}(\xi_1,u,s) \tag{8.97a}$$

mit

$$\tilde{R}_i(\xi_1,u,s) := \Delta t R_i(u,t_1+s\Delta t), \tag{8.97b}$$

$$\bar{V}(\xi_1,u,s) := (\Delta t)^2 V(u,t_1+s\Delta t). \tag{8.97b}$$

Dann gilt

$$g(y,\xi) = \bar{S}[\xi_1;\hat{\vartheta}(y,\xi,s)] - S^*(\xi,0), \tag{8.98a}$$

und somit nach (8.94)

$$S^c(P_1,P_2) = \bar{S}[\xi_1;\bar{\vartheta}(\xi,s)]/\Delta t, \tag{8.98b}$$

wobei $\bar{\vartheta}(\xi,s):=\hat{\vartheta}(\bar{y}(\xi),\xi;s)$. $\bar{\vartheta}$ genügt der zu der Lagrangefunktion $\bar{\mathcal{L}}$ assoziierten Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial\bar{\vartheta}} - \frac{d}{ds}\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial\bar{\vartheta}'} = 0, \tag{8.99}$$

mit Randbedingungen $\bar{\vartheta}(\xi,0)=q_1$, $\bar{\vartheta}(\xi,1)=q_2$. Durch Differentiation von (8.99) nach q_{ik} $(i=1,2\ ,\ 1\leq k\leq M)$ folgt, daß die MxM-Matritzen $\Theta_i(\xi,s)$ $(i=1,2)$, definiert durch $\Theta_{i,jk}:=\partial\bar{\vartheta}_j(\xi,s)/\partial q_{ik}(i=1,2\ ,\ 1\leq j,k\leq M)$ der Differentialgleichung

$$\hat{L}(\bar{y}(\xi),\xi)\,\Theta_i(\xi,s) = 0$$

genügen mit Randbedingungen $\Theta_1(\xi,0)=\Theta_2(\xi,1)=E_M$, $\Theta_1(\xi,1)=\Theta_2(\xi,0)=0$. Setzt man daher

$$\bar{\Theta}_i(\mathfrak{E},s) := \hat{W}(\mathfrak{E}_1,s)\,\Theta_i'(\mathfrak{E},s) + \hat{R}(\bar{y}(\mathfrak{E}),\mathfrak{E};s)\,\Theta_i(\mathfrak{E},s),\ i=1,2,$$

so ist die 2Mx2M-Matrix

$$\hat{\Theta}(\mathfrak{E},s) = \begin{bmatrix} \Theta_1(\mathfrak{E},s) & \Theta_2(\mathfrak{E},s) \\ \bar{\Theta}_1(\mathfrak{E},s) & \bar{\Theta}_2(\mathfrak{E},s) \end{bmatrix}$$

Lösungsmatrix des zu $\hat{L}(\bar{y}(\mathfrak{E}),\mathfrak{E})$ korrespondierenden linearen Hamiltonsystems, woraus sofort folgt, daß

$$\bar{\Theta}_2(\mathfrak{E},0) = \bar{U}_2^{-1}(1,\bar{y}(\mathfrak{E}),\mathfrak{E}). \tag{8.100}$$

(Da nach Voraussetzung $\det g^{(2)}(\bar{y}(\mathfrak{E}),\mathfrak{E}) \neq 0$ gilt, ist $\bar{U}_2(1,\bar{y}(\mathfrak{E}),\mathfrak{E})$ regulär.) Andrerseits ergibt sich durch Differentiation von (8.98b) unter Berücksichtigung von (8.99), daß $\partial^2 S^c(P_1,P_2)/\partial q_{1i}\partial q_{2j} = -\bar{\Theta}_{2,ij}(\mathfrak{E},0)/\Delta t$, d.h. für die Van Vleck-Determinante gilt

$$\det\left[\partial^2 S^c(P_1,P_2)/\partial q_1 \partial q_2\right] = (-\Delta t)^{-M} \det \bar{U}_2^{-1}(1,\bar{y}(\mathfrak{E}),\mathfrak{E}). \tag{8.101}$$

Gleich. (8.95) folgt aus (8.88) und (8.101). □

(2) Die Approximationsformel für den Propagator:

Wir leiten nun die semiklassische Approximationsformel für den quantenmechanischen Propagator in einer Umgebung der konjugierten Punkte P_1^0, P_2^0 ab. Im semiklassischen Limes kommt der Hauptbeitrag zu dem Wegintegral (8.48)-(8.50) von einer Umgebung der klassischen Wege. Setzt man daher in (8.49) $b_i := y_i$ $(1 \leq i \leq M')$ und $b_j := a_j$ $(j \geq M'+1)$, so kann für $\mathfrak{E}$ in einer Umgebung von $\mathfrak{E}=0$ der unendliche Integrationsbereich über $y=(y_1,\ldots,y_{M'})$ in dem Integral in (8.49) durch eine Umgebung Ω von $y=o$ ersetzt werden. Es kann daher (8.51) verwendet werden und man erhält durch Einsetzen von (8.51) in (8.49):

$$K_N^* \approx \exp\left[iS^*(\mathfrak{E},0)/\hbar\Delta t\right] \int_\Omega dy_1 \ldots dy_{M'} \exp\left[ig(y,\mathfrak{E})/\hbar\Delta t\right] \\ \times J_N^* \int da_{M'+1} \ldots da_{MN} \exp\left\{i \sum_{j,k=M'+1}^{MN} B_{kj}(\mathfrak{E},y) a_k a_j / 2\hbar\Delta t\right\}. \tag{8.102}$$

Für das Integral über die "regulären" Fourier-Koeffizienten a_k $(M'+1 \leq k \leq MN)$ erhält man mit (8.50), (8.57) und (8.87) im Limes $N \to \infty$:

$$\lim_{N\to\infty} J_N^* \int da_{M'+1} \ldots da_{MN} \exp\left\{i \sum_{k,j=M'+1}^{MN} B_{kj}(\mathfrak{E},y) a_k a_j / 2h\Delta t\right\} \\ = (2\pi i\hbar\Delta t)^{-(M+M')/2} e^{-\bar{M}\pi i/2} |F(y,\mathfrak{E})|^{1/2}. \tag{8.103}$$

Dabei ist $\bar{M}$ die Anzahl der negativen Eigenwerte $\mu_k(y,\mathfrak{E})$ $(k \geq M'+1)$ der Matrix $\left\{B_{kj}(\mathfrak{E},y)\right\}_{k,j \geq M'+1}$, d.h. $\bar{M}$ ist gleich der Anzahl der negativen Eigenwerte von L und gibt demnach die Anzahl der bzgl. $q_0(t)$ konjugierten Punkte für $t \in [t_1^0, t_2^0[$ an, wobei jeder konjugierte Punkt seiner Vielfachheit entsprechend gezählt wird.

Es sei $Y(\mathfrak{E},x)=(Y_1(\mathfrak{E},x),\ldots,Y_{M'}(\mathfrak{E},x))$ $(x \in \mathbb{R}^{M'})$ die Umkehrabbildung von $X(\mathfrak{E},y)$, d.h. es gilt $Y(\mathfrak{E},x=X(\mathfrak{E},y))=y$ und $X(\mathfrak{E},y=Y(\mathfrak{E},x))=x$, wobei $X(\mathfrak{E},y)=(X_1(\mathfrak{E},y),\ldots.$

$\ldots,X_{M'}(\xi,y))$ durch (7.27)-(7.29) bestimmt ist mit dem Katastrophenpolynom $f(x,d)$. Führt man in dem Integral über die singulären Fourier-Koeffizienten $y_1,\ldots,y_{M'}$ in (8.102) eine Transformation $y\longrightarrow x=X(\xi,y)$ durch, so erhält man mit (7.27), (8.48) und (8.102), (8.103) die folgende Approximationsformel für den Propagator:

$$K(P_2,P_1) \approx (2\pi i\hbar\Delta t)^{-(M+M')/2}\exp\{i[S^*(\xi,0)+e(\xi)]/\hbar\Delta t - \bar{M}\pi i/2\}\Psi(\xi), \qquad (8.104)$$

mit dem oszillatorischen Integral

$$\Psi(\xi) := \int_{\Omega} dx_1\ldots dx_{M'}H(x,\xi)\exp\{if(x,d(\xi))/\hbar\Delta t\}. \qquad (8.105)$$

Dabei ist

$$H(x,\xi) := |F(Y(x,\xi),\xi)|^{1/2}|D(x,\xi)|, \qquad (8.106)$$

und $D(x,\xi):=\det\partial Y(x,\xi)/\partial x$ ist die Determinante der Transformation $y\rightarrow x$. Nach Theorem 8.2 und Theorem 8.3 ist H eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion für (x,ξ) in einer Umgebung von $(x,\xi)=(0,0)$. Setze $f^{(2)}(x,d):=\partial^2 f(x,d)/\partial x\partial x\in\mathcal{M}(M',M')$. Die Bifurkationsmenge

$$\Sigma_f := \{\xi \mid \nabla_x f(x,d(\xi))=0,\ \det f^{(2)}(x,d(\xi))=0\}, \qquad (8.107)$$

unterteilt den ξ-Raum in verschiedene Gebiete. In jedem dieser Gebiete können mehrere (oder keine) verschiedene klassische Wege $q_\xi(t)$ mit $q_\xi(t_i)=q_i$ $(i=1,2)$ existieren, die eindeutig durch die Lösungen x_ξ des Gleichungssystems

$$\nabla_x f(x,d(\xi)) = 0 \qquad (8.108)$$

bestimmt sind. Wenigstens zwei verschiedene Lösungszweige von (8.108), die in einem Gebiet existieren, verschwinden auf Σ_f. Ist $x_j(\xi)$ ein Lösungszweig von (8.108), so ist die zu $x_j(\xi)$ korrespondierende Lösung $q_j^c(t;P_1,P_2)$ $(q_j^c(t_i;P_1,P_2)=q_i,\ i=1,2)$ der Euler-Lagrange-Gleichung (7.3) mit (8.93) gegeben durch

$$q_j^c(t;P_1,P_2) = \hat{v}(Y(x_j(\xi),\xi),\xi,(t-t_1)/\Delta t). \qquad (8.109)$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

(i) ξ sei in einem Gebiet, in dem $n\geq 1$ verschiedene Lösungszweige $x_k(\xi)$ $(1\leq k\leq n)$ von (8.108) existieren. Unter der Voraussetzung, daß ξ eine ausreichende Distanz von Σ_f besitzt, sind diese Lösungen im x-Raum wohl unterscheidbar und liefern scharfe Extrema von $f(x,d(\xi))$. Dann kann die Methode der stationären Phase [80] auf das Integral in (8.105) angewandt werden. Dies führt zu folgender Approximation für Ψ:

$$\Psi(\xi) \approx \sum_{j=1}^{n}(2\pi i\hbar\Delta t)^{M'/2}H(x_j(\xi),\xi)\,|\det f^{(2)}(x_j(\xi),d(\xi))|^{-1/2} \\ \times \exp\{if(x_j(\xi),d(\xi))/\hbar\Delta t - \bar{M}_j\pi i/2\}. \qquad (8.110)$$

$\bar{M}_j$ ist die Anzahl der negativen Eigenwerte der Matrix $f^{(2)}(x_j(\xi),d(\xi))$. $q_j^c(t;P_1,P_2)$ $(1\leq j\leq n)$ sei der zu $x_j(\xi)$ assoziierte klassische Weg nach (8.109). Mit (8.94) und (7.27) ist die Hamilton'sche Principalfunktion S_j^c entlang q_j^c gegeben durch

$$S_j^c(P_1,P_2) := S_{P_1P_2}\left[q_j^c(t;P_1,P_2)\right] = (1/\Delta t)\left[S^*(\xi,0)+e(\xi)+f(x_j(\xi),d(\xi))\right], \quad (8.111)$$

und für die Van Vleck-Determinante von S_j^c erhält man wegen

$$\left[D(x_j(\xi),\xi)\right]^2 \det g^{(2)}(Y(x_j(\xi),\xi),\xi) = \det f^{(2)}(x_j(\xi),\xi)$$

mit Lemma 8.3 und Gleich. (8.106),

$$\left|\det \partial^2 S_j^c(P_1,P_2)/\partial q_1 \partial q_2\right|^{1/2} = (\Delta t)^{-M/2} H(x_j(\xi),\xi)\left|\det f^{(2)}(x_j(\xi),d(\xi))\right|^{-1/2}. \quad (8.112)$$

Mit (8.104) und (8.110)-(8.112) ergibt sich die folgende Approximation für K:

$$K(P_2,P_1) \approx \sum_{j=1}^{n} K_j(P_2,P_1), \quad (8.113a)$$

wobei K_j gegeben ist durch

$$K_j(P_2,P_1) = (2\pi i\hbar)^{-M/2}\left|\det \partial^2 S_j^c(P_1,P_2)/\partial q_1 \partial q_2\right|^{1/2} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_j^c(P_1,P_2) - (\bar{M}+\bar{M}_j)\pi i/2\right\}. \quad (8.113b)$$

$\bar{M}+\bar{M}_j$ ist die Anzahl der konjugierten Punkte, die von q_j^c im Zeitintervall $[t_1,t_2]$ durchlaufen werden. (8.113) stimmt somit mit der konventionellen Approximationsformel (8.3) überein.

(ii) ξ sei in einem Gebiet, in dem keine Lösungen von Gleich. (8.108) existieren. Dieses Gebiet ist klassisch verboten. Läßt man jedoch komplexe x zu, und setzt man f und H analytisch fort, so besitzt Gleich. (8.108) in diesem Gebiet genau r+1 (r:=codimf_o, f_o=$f_o(x)$:=f(x,0)) komplexe Lösungen $x_j^c(\xi)=\alpha_j(\xi)+i\beta_j(\xi)$ $(1\leq j\leq r+1)$ mit reellen α_j, β_j und $\beta_j\neq 0$. Unter der Voraussetzung, daß ξ eine ausreichende Distanz von Σ_f besitzt, kann die Sattelpunktsmethode [80] zur approximativen Integration von (8.105) herangezogen werden und man erhält:

$$\Psi(\xi) \approx \sum_{j=1}^{r+1} (2\pi i\hbar\Delta t)^{M'/2} H(x_j^c(\xi),\xi)\left[\det f^{(2)}(x_j^c(\xi),d(\xi))\right]^{-1/2} \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar} f_{1j}(\xi)/\Delta t\right\}\exp\left\{-f_{2j}(\xi)/\Delta t\right\}, \quad (8.114)$$

wobei f_{1j}, bzw. f_{2j} der Real-, bzw. Imaginärteiteil von $f(x_j^c(\xi),d(\xi))$ ist. Die explizite Abhängigkeit von f_{2j} von ξ kann allgemein, ohne weitere Vorkentnisse über das System, nicht angegeben werden, da f_{2j} sowohl durch das Katastrophenpolynom f als auch durch die Abhängigkeit der Entfaltungsparameter von ξ bestimmt ist. Vom physikalischen Standpunkt aus ist es jedoch klar, daß f_{2j} mit zunehmender Distanz von ξ von Σ_f wachsen muß, da in diesem Fall der Propagator abnehmen muß.

(iii) Falls ξ nahe bei oder auf der Bifurkationsmenge Σ_f ist, können die Approximationen (8.113), bzw. (8.114) nicht mehr verwendet werden, da die Determinanten in (8.110) bzw. (8.114) divergieren. In diesem Fall erhält man eine endliche und gleichförmige Approximation von (8.105) nach einer Methode, die von Duistermaat [8] und Berry [66] entwickelt wurde:

Nach der Theorie der Entfaltungen von Singularitäten (Theorem 1.6) folgt, daß H geschrieben werden kann als

$$H(x,\xi) = H_o(\xi) + \sum_{j=1}^{r} H_j(\xi)\frac{\partial f(x,d(\xi))}{\partial d_j} + \sum_{k=1}^{M'} \tilde{H}_k(x,\xi)\frac{\partial f(x,d(\xi))}{\partial x_k}\ , \qquad (8.115)$$

mit Funktionen H_o, H_j, $\tilde{H}_k$. In den stationären Punkten von f, die durch Gleich. (8.108) bestimmt sind, verschwindet der letzte Term in (8.115), der deshalb vernachlässigt werden kann [66], so daß

$$H(x,\xi) \approx H_o(\xi) + \sum_{j=1}^{r} H_j(\xi)\frac{\partial f(x,d(\xi))}{\partial d_j} = H_o(\xi) + \sum_{j=1}^{r} H_j(\xi)x^{l_j}, \qquad (8.116)$$

(vgl. Gleich. (7.28)). Da es genau r+1 verschiedene Lösungen von Gleich. (8.108) gibt [8], erhält man durch Einsetzen dieser Lösungen in (8.115) r+1 Gleichungen zur Bestimmung der H_o, H_j $(1 \leq j \leq r)$ [66]. Einsetzen von (8.116) in (8.105) ergibt

$$\Psi(\xi) \approx H_o(\xi)\Phi(d(\xi)) - i\hbar\Delta t\sum_{j=1}^{r} H_j(\xi)\,\partial\Phi(d(\xi))/\partial d_j, \qquad (8.117)$$

mit dem verallgemeinerten Airy-Integral

$$\Phi(d) := \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots dx_{M'} \exp\{if(x,d)/\hbar\Delta t\}, \qquad (8.118)$$

wobei Ω wieder durch einen unendlichen Integrationsbereich ersetzt wurde, da für nicht zu große d der Hauptbeitrag in (8.118) von einer Umgebung von x=0 kommt. Funktionen vom Typ (8.117) mit (8.118) sind in der Optik wohlbekannt, wenn Wellenfunktionen in der Umgebung einer Kaustik mit der Eikonal-Methode approximiert werden [81-83]. Es war daher zu erwarten, daß Integrale dieses Typs auch in der Quantenmechanik auftreten, wenn ein Propagator in der Umgebung von konjugierten Punkten semiklassisch approximiert wird. Mit (8.117) ergibt sich, daß

$$K(P_2,P_1) \approx K_1(\xi)\Big\{H_o(\xi)\Phi(d(\xi)) - i\hbar\Delta t\sum_{j=1}^{r} H_j(\xi)\frac{\partial\Phi(d(\xi))}{\partial d_j}\Big\}, \qquad (8.119)$$

wobei

$$K_1(\xi) := (2\pi i\hbar\Delta t)^{-(M+M')/2}\exp\{i[S^*(\xi,0)+e(\xi)]/\hbar\Delta t - \bar{M}\pi i/2\}. \qquad (8.120)$$

(8.119) mit (8.120) und (8.118) ist die gewünschte Approximationsformel für den Propagator. Da angenommen wurde, daß g(y,0) endlich bestimmt ist (dies ist generischerweise der Fall), ist Φ endlich in einer Umgebung von $\xi=0$ [11]. Demnach divergiert die Approximationsformel (8.119) nicht auf den Kaustiken. Dies ist der wesentliche und physikalisch signifikante Unterschied zu Approximationsformeln, die auf (8.2) basieren. Approximiert man (8.118) für von Σ_f genügend entfernte Gebiete mit der Methode der stationären Phase, so zeigt man leicht mit (8.115)-(8.118), daß sich (8.117) auf (8.110), bzw. (8.114) in den Gebieten (i), bzw. (ii) reduziert. (8.117) ist daher eine gleichförmige Approximation für $\Psi(\xi)$ [66].

Betrachtet man nur eine kleine Umgebung von $\xi=0$, so kann $H_o(\xi)$ approximativ durch $H_o(0)=H(0,0)= D_oF_o$ ersetzt werden ($D_o := |D(0,0)|$, $F_o := |F(0,0)|^{1/2}$) und der zweite Term in (8.117) gegenüber dem ersten vernachlässigt werden. Man erhält dann die folgende Approximation des Propagators in einer kleinen Umgebung von $\xi=0$:

$$K(P_2,P_1) \approx K_1(E)D_0F_0\varphi(d(E)). \tag{8.121}$$

D_0 folgt aus der Transformation $g \longrightarrow f$ (Gleich. (7.27)), während F_0 mit (8.67) und (8.87) gegeben ist durch

$$F_0 = \left|(\det(C^TB))/(\det A)(\det C_2)\right|^{1/2}, \quad 1 \leq M' < M, \tag{8.122a}$$

$$F_0 = \left|\det(D_2A^{-1})\right|^{1/2}, \quad M'=M. \tag{8.122b}$$

Wären P_1^0 und P_2^0 keine konjugierten Punkte, so wäre C_2 regulär und man könnte die Gleichung $q(t_2;t_1,q_1,\dot{q}_1)=q_2$ in einer Umgebung von (P_1^0,P_2^0) nach $\dot{q}_1(P_1,P_2)$ auflösen und einen klassischen Weg $q_c(t;P_1,P_2):=q(t;t_1,q_1,\dot{q}_1(P_1,P_2))$ angeben, der die Randbedingungen $q_c(t_i;P_1,P_2)=q_i$ (i=1,2) erfüllt. Dann könnte die Hamilton'sche Principalfunktion definiert werden durch $S^c(P_1,P_2):=S_{P_1P_2}\left[q_c(t;P_1,P_2)\right]$ und für die Van Vleck-Determinante würde man

$$\det\partial^2S^c(P_1^0,P_2^0)/\partial q_1\partial q_2 = (-\Delta t_0)^{-M}\det C_2^{-1}$$

erhalten. Da jedoch vorausgesetzt wurde, daß P_1^0, P_2^0 konjugierte Punkte der Ordnung $M' \geq 1$ sind, besitzt C_2 einen M'-dimensionalenKern und ist nur auf einem (M-M')-dimensionalen Teilraum von $\mathbb{R}^M$ regulär. Aus (8.122a) ist daher ersichtlich, daß die Determinante von C_2 ersetzt wird durch die Determinante des"regulären Anteils"von C_2 (repräsentiert durch $\bar{C}_2$), multipliziert mit $\det A/\det(C^TB)$, d.h. der "singuläre Anteil" von C_2 wird durch diesen Term ersetzt.

(3) Kritische Exponenten:

Wir nehmen an, daß die Normalform $f_0(x):=f(x,0)$ quasihomogen [11] ist, d.h. es gibt rationale Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_{M'}$, $0 < \alpha_n \leq 1/2$, so daß

$$f_0(\lambda^{\alpha_1}x_1,\ldots,\lambda^{\alpha_{M'}}x_{M'}) = \lambda f_0(x_1,\ldots,x_{M'}), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{8.123}$$

Dann kann die verallgemeinerte Airy-Funktion $\varphi(d)$ (Gleich. (8.118)), die von dem "großen Parameter" $1/\hbar\Delta t$ abhängt, durch eine von $1/\hbar\Delta t$ unabhängige Normalform $\varphi_0(d)$ dargestellt werden. Setzt man nämlich

$$\varphi_0(d) := \int dx_1\ldots dx_{M'}e^{if(x,d)}, \tag{8.124}$$

so erhält man

$$\varphi(d) = (\hbar\Delta t)^{\delta}\varphi_0((\hbar\Delta t)^{\gamma_1}d_1,\ldots,(\hbar\Delta t)^{\gamma_r}d_r), \tag{8.125}$$

mit

$$\delta := \sum_{n=1}^{M'}\alpha_n =: \frac{M'}{2} - \beta, \tag{8.126a}$$

$$\gamma_j := \sum_{n=1}^{M'}\alpha_n l_n^j - 1, \tag{8.126b}$$

wobei die $l_j:=(l_1^j,\ldots,l_{M'}^j)$, $l_n^j \in \mathbb{N}_0$, $|l_j| \geq 1$, die Multiindices der universellen Entfaltung f von f_0 sind (Gleich. (7.28)). Analog erhält man mit $\varphi_{0j}(d):=\partial\varphi_0(d)/\partial d_j$, daß

$$\partial\varphi(d)/\partial d_j = (\hbar\Delta t)^{\delta+\gamma_j}\,\varphi_{oj}((\hbar\Delta t)^{\gamma_1}d_1,\ldots,(\hbar\Delta t)^{\gamma_r}d_r)\ ,\ 1\leq j\leq r. \qquad (8.127)$$

β heißt Singularitätsindex [11] und δ der kritische Exponent von f [84]. Die Normalformen der einfachen und der parabolischen Singularitäten sind quasihomogen, während die Normalformen der hyperbolischen Singularitäten nicht quasihomogen sind. Singularitätsindex β und kritischer Exponent δ sind für die einfachen und die unimodalen Katastrophen in Tabelle 4 aufgelistet. Die Zahlen α_n, γ_j, $\delta+\gamma_j$ sind in Tabelle 5 für die Normalformen der einfachen Singularitäten angegeben.

Typ	A_k	D_k	E_6	E_7	E_8	Q_{10}	Q_{11}	Q_{12}	S_{11}	S_{12}	U_{12}	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	W_{12}	W_{13}
β	$\frac{1}{2}\,\frac{k-1}{k+1}$	$\frac{1}{2}\,\frac{k-2}{k-1}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{17}{30}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{15}{26}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{9}{16}$
δ	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{1}{2}\,\frac{k}{k-1}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{23}{24}$	$\frac{17}{18}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{7}{16}$

Tabelle 4: Singularitätsindices und kritische Exponenten der einfachen und quasihomogenen unimodalen Katastrophen (nach Arnold, [11]).

K_{12}	K_{13}	K_{14}
$\frac{11}{21}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{13}{24}$
$\frac{10}{21}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{11}{24}$

Typ	A_k	D_k		E_6				
α_n	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{1}{2}\,\frac{k-2}{k-1}$	$\frac{1}{k-1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$			
$\frac{\partial f}{\partial d_j}$	$x^j,\ 1\leq j\leq k-1$	x	$y^{j-1},\ 2\leq j\leq k-1$	x	y	xy	y^2	xy^2
$-\gamma_j$	$1-\frac{j}{k+1}$	$\frac{k}{2(k-1)}$	$\frac{k-j}{k-1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$\delta+\gamma_j$	$-\frac{k-j}{k+1}$	0	$\frac{2j-k}{2(k-1)}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$

E_7						E_8					
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$					$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$				
x	xy	y	y^2	y^3	y^4	x	xy	xy^2	xy^3	y	y^2	y^3
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$

Tabelle 5: Die Zahlen α_n, γ_j, $\delta+\gamma_j$ der Normalformen der einfachen Singularitäten.

8.4 Beispiele

(1) Beitrag von zwei klassischen Wegen:

Als illustratives Beispiel wird angenommen, daß $\bar{M}=0$, $M'=1$ und

$$g(y,0) = g_3 y^3 + o(y^3),\ y\equiv y_1,$$

mit $g_3>0$. Das zu g assoziierte Katastrophenpolynom ist in diesem Fall die fold-Katastrophe,

$$f(x,d) = x^3/3 - ax\ ,\quad x\equiv x_1,$$

wobei $d\equiv d_1=:-a$. f besitzt zwei stationäre Punkte, gegeben durch $x_1=a^{1/2}$, $x_2=-a^{1/2}$. Für positives a hat der zu x_1 assoziierte klassische Weg $q_1^c(t;P_1,P_2)$ einen Fokalpunkt zu einer Zeit $t=\bar{t}$, $t_1<\bar{t}<t_2$ durchlaufen, während bzgl. des zu x_2 assoziierten klassischen Weges $q_2^c(t;P_1,P_2)$ keine konjugierten Punkte für $t\in[t_1,t_2]$ existieren. Einsetzen von $x=x_j$ $(j=1,2)$ in f ergibt $a=[3(f_2-f_1)/4]^{2/3}$, wobei $f_j:=f(x_j(\mathfrak{t}),d(\mathfrak{t}))$, d.h. $f_1=-2a^{3/2}/3$, $f_2=2a^{3/2}/3$. Mit Gleich. (8.111) erhält man $a=(\hbar\Delta t)^{2/3}Z$, wobei

$$Z := \left[\tfrac{3}{4}(\Phi_2-\Phi_1)\right]^{2/3},\quad \Phi_j:=S_j^c(P_1,P_2)/\hbar\quad (j=1,2).$$

Nach (8.115) nimmt H die folgende Form an,

$$H(x,\mathfrak{t}) = H_0(\mathfrak{t}) + H_1(\mathfrak{t})x + \tilde{H}_1(x,\mathfrak{t})(x^2-a).$$

Setzt man in dieser Gleichung $x=x_j$ $(j=1,2)$, so ergibt sich, daß

$$H_0(\mathfrak{t}) = \tfrac{1}{2}\left[H(x_1(\mathfrak{t}),\mathfrak{t}) + H(x_2(\mathfrak{t}),\mathfrak{t})\right]$$

$$H_1(\mathfrak{t}) = \tfrac{1}{2}\left[H(x_1(\mathfrak{t}),\mathfrak{t}) - H(x_2(\mathfrak{t}),\mathfrak{t})\right]a^{-1/2}.$$

Mit Gleich. (8.112) und $\partial^2 f/\partial x^2\big|_{x=x_1}=2a^{1/2}$, $\partial^2 f/\partial x^2\big|_{x=x_2}=-2a^{1/2}$, findet man, daß

$$(2\pi\hbar\Delta t)^{-(M+1)/2}H_0 = \tfrac{1}{2}\pi^{-1/2}(\hbar\Delta t)^{-1/3}Z^{1/4}\left(|p_1|^{1/2}+|p_2|^{1/2}\right),$$

$$(2\pi\hbar\Delta t)^{-(M+1)/2}(\hbar\Delta t)H_1 = \tfrac{1}{2}\pi^{-1/2}(\hbar\Delta t)^{1/3}Z^{-1/4}\left(|p_1|^{1/2}-|p_2|^{1/2}\right),$$

wobei $p_j:=(2\pi\hbar)^{-M/2}\det\partial^2 S_j^c/\partial q_1\partial q_2$ $(j=1,2)$ ist. $\varphi(-a)$ kann durch die reguläre Airy-Funktion Ai dargestellt werden,

$$\varphi(-a) = 2\pi(\hbar\Delta t)^{1/3}\mathrm{Ai}(-Z)$$

und für die Ableitung φ' von φ erhält man mit der Ableitung Ai' von Ai, daß

$$\varphi'(-a) = 2\pi(\hbar\Delta t)^{-1/3}\mathrm{Ai}'(-Z).$$

Damit folgt aus (8.119) und (8.120) für den Propagator:

$$K(P_2,P_1) \approx i^{-(M+1)/2}\pi^{1/2}\Big\{Z^{1/4}\left[|p_1|^{1/2}+|p_2|^{1/2}\right]\mathrm{Ai}(-Z) - iZ^{-1/4}\left[|p_1|^{1/2}-|p_2|^{1/2}\right]\mathrm{Ai}'(-Z)\Big\}\exp\left\{\tfrac{i}{2}(\Phi_1+\Phi_2)\right\}, \tag{8.119a}$$

wobei $(S^*(\xi,0)+e(\xi))/\hbar\Delta t=(\tilde{\Phi}_1+\tilde{\Phi}_2)/2$ benützt wurde, was aus (8.111) und $f_1+f_2=0$ folgt. Für positive Z ist ξ im klassisch erlaubten Gebiet. Mit der asymptotischen Form der Airy-Funktion und ihrer Ableitung erhält man für große positive Z, daß

$$K(P_2,P_1) \approx i^{-M/2}\left\{|p_1|^{1/2}e^{i\tilde{\Phi}_1}+|p_2|^{1/2}e^{i(\tilde{\Phi}_2-\bar{M}\pi/2)}\right\}. \qquad (8.113a)$$

Da $\bar{M}=\bar{M}_1=0$, $M_2=1$ gilt, ist die Approximationsformel (8.119a) ein Spezialfall von (8.119).Connor und Marcus [85] deduzierten (8.119) mit der Methode, die von Chester, Friedman und Ursell [81] für die Approximation oszillierender Integrale vom Typ

$$\int d\tilde{y}\exp(i\tilde{g}(\tilde{y},\tilde{d})/\lambda)\ ,\quad \tilde{y},\tilde{d},\lambda\in\mathbb{R},\quad \tilde{g}(\tilde{y},0)=\tilde{g}_3\tilde{y}^3+o(\tilde{y}^3),\ \tilde{g}_3\neq 0,$$

für $\lambda\longrightarrow 0$ entwickelt wurde. Miller [67] leitete ebenfalls eine gleichförmige semiklassische Approximation für den Propagator in der Nähe einer Kaustik ab, auf der zwei klassische Wege ineinander übergehen und jenseits der Kaustik verschwinden. Letztere unterscheidet sich insofern von (8.119a), daß $Z^{-1/4}\mathrm{Ai}'(-Z)$ durch $Z^{1/4}\mathrm{Bi}(-Z)$ ersetzt wird, wobei Bi die irreguläre Airy-Funktion ist. Jedoch wiesen Connor und Marcus [85] darauf hin, daß diese Approximation äquivalent zu (8.119a) ist, da $Z^{1/4}\mathrm{Bi}(-Z)$ und $Z^{-1/4}\mathrm{Ai}'(-Z)$ dieselbe asymptotische Form für große Z besitzen, während für kleine Z beide Terme durch den ersten Term in (8.119a) dominiert werden.

(2) Der quantisierte anharmonische Oszillator:

Die Approximationsformel (8.121) wird auf die Lagrangefunktion (7.30) des anharmonischen Oszillators unter Verwendung der Resultate von Kap. 7.3 angewandt. Aus (7.24b) folgt, daß

$$D_0 = (2\omega^2/3\gamma n^2\pi^2)^{1/4} \qquad (8.128a)$$

$\tilde{U}_2^0(s)$ ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$(d^2/ds^2 + n^2\pi^2)\tilde{U}_2^0(s) = 0,\quad \tilde{U}_2^0(0)=0,\ \tilde{U}_2^{0\,\prime}(0)=1/m,$$

d.h. $\tilde{U}_2^0(s)=(1/mn\pi)\sin(n\pi s)$, bzw. $A=1/2m^2n^2\pi^2$. $\tilde{V}_2^0(s)$ ist gegeben durch $\tilde{V}_2^0(s)=m\tilde{U}_2^{0\,\prime}(s)$, woraus $D_2=(-1)^n$ folgt. Mit (8.122b) ergibt sich daher, daß

$$F_0 = mn\pi\sqrt{2}. \qquad (8.128b)$$

Setzt man noch

$$\xi := (\hbar\Delta t)^{-1/4}x,\quad a := (\hbar\Delta t)^{-3/4}d_1,\quad b := (\hbar\Delta t)^{-1/2}d_2, \qquad (8.129)$$

so erhält man mit (7.41), (8.120), (8.121), (8.128) und $\bar{M}=n-1$ für den Propagator $K(q_2,q_1,\Delta t):=K(P_2,P_1)$ in einer Umgebung von $(q_1^0,q_2^0,\Delta t_0)=(0,0,n\pi/\omega)$, daß

$$K(q_2,q_1,\Delta t) \approx \exp\left\{i\left[S^*(\xi,0)+e(\xi)\right]/\hbar\Delta t - n\pi i/2\right\}\frac{m}{\hbar\Delta t}\left(\frac{\omega n}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{\hbar\Delta t}{6\gamma}\right)^{1/4}\Psi_0(a,b), \qquad (8.130)$$

wobei Ψ_0 das verallgemeinerte Airy-Integral mit der cusp-Katastrophe im Exponent des Integranden ist,

$$\Psi_0(a,b) := \int d\xi\exp\left\{-i\left(a\xi+\tfrac{1}{2}b\xi^2+\tfrac{1}{4}\xi^4\right)\right\}. \qquad (8.131)$$

Die Bifurkationsmenge Σ_f in der a-b-Ebene ist in Fig. 19 abgebildet. In Fig. 20 ist $|\psi_0(a,b)|^2$ als Funktion von a für mehrere Werte von b dargestellt.

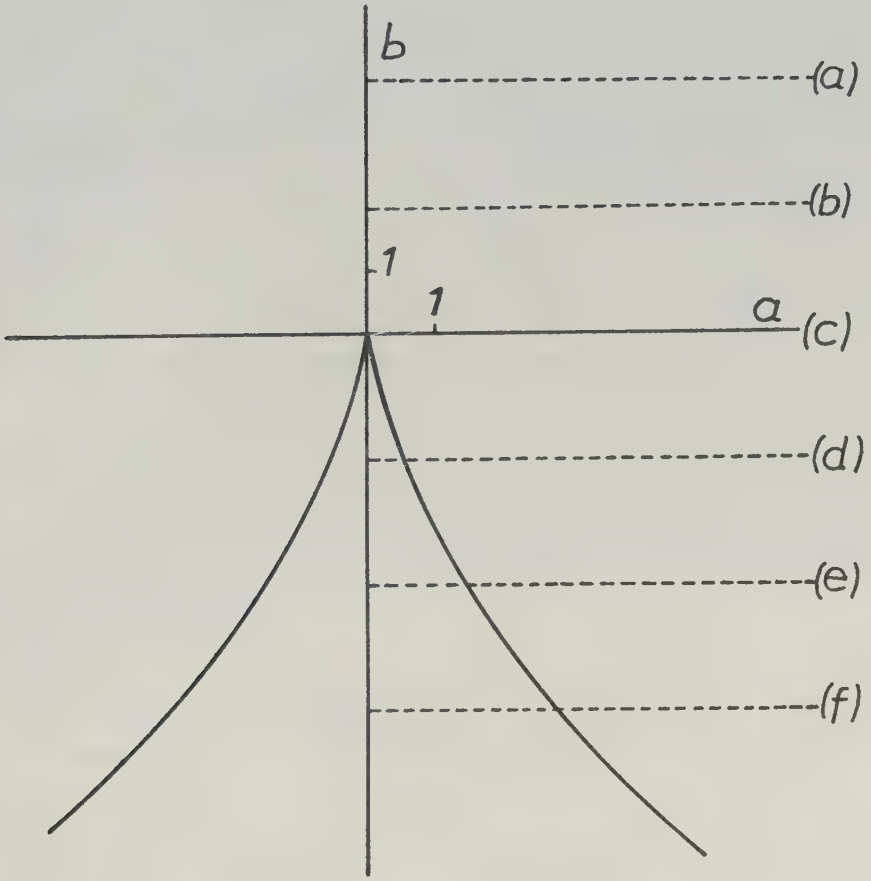


Fig. 19. Bifurkationsmenge Σ_f der cusp-Katastrophe,

$$\Sigma_f := \{(a,b) \mid 27a^2 + 4b^3 = 0\}.$$

Die Intensität p(a,b) entlang der Geraden (a) - (f) ist in Fig. 20 abgebildet.

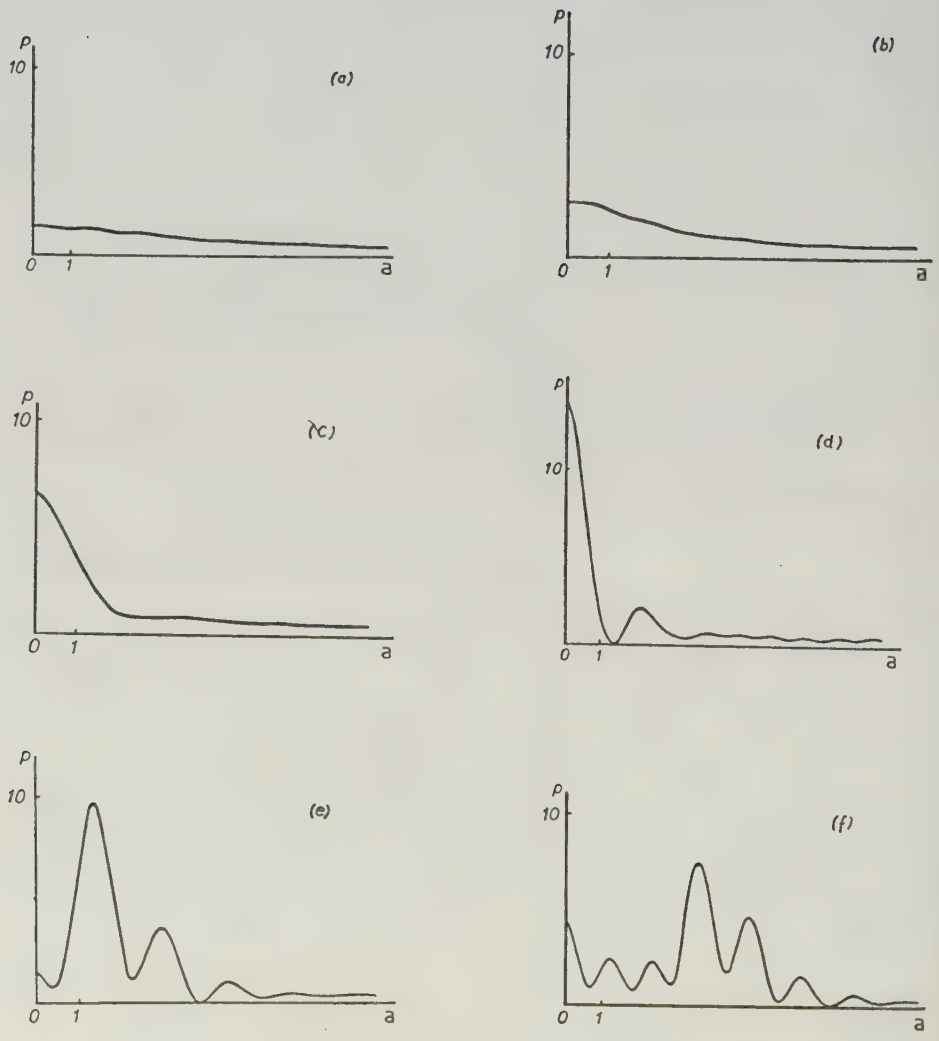


Fig. 20. Intensität des quantisierten anharmonischen Oszillators, $p(a,b)=|\varphi_0(a,b)|^2$ (Gl. (8.131)) als Funktion von a für mehrere Werte von b: (a) b=4, (b) b=2, (c) b=0, (d) b=-2, (e) b=-4, (f) b=-6.

SCHLUSSBEMERKUNGEN

Die Katastrophentheorie wurde in Kap. 2 allgemein auf Funktionale $\mathcal{H}$ in Hilbert- und Banachräumen und in Kap. 4 speziell auf nichtlineare elliptische Euler-Lagrange-Gleichungen mit Dirichlet'schen Randbedingungen erweitert. Für schwache Nichtlinearitäten (Lagrangefunktionen aus $\mathcal{H}(\Omega,s,m)$) konnte das mit der Euler-Lagrange-Gleichung assoziierte Funktional mit Hilfe eines Hilbertraumformalismus in eine Summe einer regulären quadratischen Form und einer endlich-dimensionalen Entfaltung einer Singularität transformiert werden. Bei starken Nichtlinearitäten (Lagrangefunktionen aus $\mathcal{P}(\Omega,s,m)$) versagte der Hilbertraumformalismus. Es mußte ein Banachraumformalismus entwickelt werden, durch den die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung eindeutig den stationären Punkten der Entfaltung einer Singularität zugeordnet werden konnten. Eine Transformationsformel für das Funktional selbst ließ sich bei starken Nichtlinearitäten nicht deduzieren, da der zur zweiten Ableitung von $\mathcal{H}$ korrespondierende Operator kein Fredholmoperator von $B_1:=B_p^{2m}$ nach B_1^* ist (das Bild ist nicht abgeschlossen in B_1^*): Die Fredholmeigenschaft ist nur bzgl. eines in B_1^* dicht eingebetteten Banachraums $B_2:=B_p$ erfüllt. Für praktische Anwendungen ist dies jedoch irrelevant, sofern man sich nur für die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung interessiert. Die Funktionen g und h sind sowohl bei schwachen als auch bei starken Nichtlinearitäten durch dieselben Gleichungen bestimmt. Daß der in Kap. 2 bis 4 entwickelte Formalismus durchaus für praktische Anwendungen geeignet ist, wurde in Kap. 5 gezeigt: Hier wurde das Bifurkationsverhalten der Biegung von Stäben auf einen Doppel-cusp zurückgeführt.

In Kap. 7 wurde mit den in Kap. 2 entwickelten Methoden das Wirkungsfunktional der klassischen Mechanik in einer Umgebung von konjugierten Punkten P_1^o,P_2^o durch ein Katastrophenpolynom $f(x,d(\xi))$ $(\xi=(P_1-P_1^o,P_2-P_2^o))$ so dargestellt, daß jede Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung mit vorgeschriebenen Randpunkten (P_1,P_2) nahe bei (P_1^o,P_2^o) eindeutig aus den stationären Punkten von f bestimmt ist. Damit wurde in Kap. 8 eine semiklassische Approximationsformel für den quantenmechanischen Propagator $K(P_2,P_1)$ abgeleitet, die auf Kaustiken endlich bleibt. Diese Approximationsformel ist proportional zu einem oszillatorischen Integral mit dem Katastrophenpolynom $f(x,d(\xi))$ im Exponent des Integranden. Die Bifurkationsmenge Σ_f unterteilt den ξ-Raum in verschiedene Gebiete, die i.a. mehrfach von klassischen Wegen überdeckt sind, welche die vorgeschriebenen Raum-Zeit-Punkte P_1,P_2 verbinden. Die Bifurkationsphänomene von f spiegeln genau jene der klassischen Wege wieder. In einer Umgebung der Bifurkationsmenge Σ_f erhält man ein verallgemeinertes Airy-Integral in der semiklassischen Approximation des Propagators. Außerhalb derselben sind die konventionellen Approximationsformeln gültig, während in klassisch verbotenen Gebieten der semiklassische Propagator exponentiell abfällt.

Noch nicht geklärt wurde die Frage, unter welchen Voraussetzungen die Entfaltung $g(y,\mathfrak{E})$ der Singularität $g_0(y)=g(y,0)$ (Kap. 7, Gleich. (7.23)) versell ist. Beim anharmonischen Oszillator (Kap. 7.3 und Kap. 8.4(2)) war dies der Fall, jedoch zeigt sich in einfachen Fällen (z.B. für $\mathcal{L}=\dot{q}^2/2-q^2/2-q^6/2$, $q\in\mathbb{R}$), daß erst durch Hinzunahme äußerer Parameter $\lambda\in\mathbb{R}^k$ (von denen das Potential V abhängen kann) die Singularität $g_0(y)$ von $g(y,\mathfrak{E},\lambda)$ versell entfaltet wird. Die Frage, wann g eine verselle Entfaltung von g_0 ist, ist Gegenstand einer anderen Untersuchung.

Ein weiterer noch zu klärender Punkt ist die "Güte" der semiklassischen Approximationsformel. Um diese bestimmen zu können, müßte man den Propagator nach rationalen Potenzen von $\hbar$ entwickeln und die einzelnen Terme abschätzen. Eine Entwicklung des Propagators nach Potenzen von $\hbar$ wurde von DeWitt-Morette [76] und Coyne [86] für nichtkonjugierte Punkte durchgeführt. Es ist zu erwarten, daß sich auch in einer Umgebung konjugierter Punkte eine solche Entwicklung angeben läßt, wobei die in Kap. 8 (Gleich. (8.119)) abgeleitete Approximationsformel der führende Term sein dürfte.

Zu bemerken ist noch, daß der in Teil II entwickelte Formalismus auch auf die Brown'sche Bewegung angewandt werden kann, da diese durch ein Wiener-Integral [73,74] repräsentiert wird. Der "große Parameter" $i/\hbar$ ist dabei durch die Diffusionskonstante zu ersetzen. Erhält man dann eine quasihomogene Singularität $f_0(x)=f(x,0)$, so wäre bei der "semiklassischen Approximation" von Wiener-Integralen das verallgemeinerte Airy-Integral durch ein Integral vom Typ

$$\int dx_1\ldots dx_M \exp[-f(x,d)]$$

zu ersetzen, wobei natürlich nur solche Katastrophenpolynome f in Frage kommen, für die das Integral konvergiert.

Herrn Professor W. Güttinger danke ich für die hilfsbereite Förderung dieser Arbeit sowie für die hervorragenden Arbeitsbedingungen an seinem Institut. Für anregende Diskussionen und Hinweise bin ich ihm, sowie Professor M.V. Berry (Bristol), Frau Professor C. DeWitt-Morette (Austin), Professor R. Thom (Paris), Professor T. Poston (Genf) und den Herren Dr. H. Eikemeier, Dipl. Phys. K. Keller und insbesondere Dipl. Phys. W. Veit vom Institut für Informationsverarbeitung zu besonderem Dank verpflichtet. Ferner danke ich meiner Frau für ihre Hilfe bei der Anfertigung der Figuren.

ANHANG

Anhang A. Ableitung von Gleich. (5.19):

Setze $h:=(h_1,h_2,\ldots,h_{m-1},h_{m+1},h_{m+2},\ldots)$. Mit (5.2) läßt sich das Gleichungssystem (5.11) für $\tau=0$ in Operatorform formulieren:

$$A(\varsigma)h - y^3h_o + y^2Lh + yBh^2 + Ch^3 = 0, \tag{A1}$$

wobei $A(\varsigma)$ der lineare Operator

$$(A(\varsigma)h)_l := (\gamma_l(\lambda_m,\mu) - 2l^2\varsigma)h_l, \quad l\in\mathbb{N}, \quad l\neq m,$$

ist. L ist ebenfalls linear, B bilinear und C ein kubischer Operator,

$$(Lh)_l = 3\mu\sum_{k=1;k\neq m}^{\infty}\alpha_{mmkl}h_k, \quad (Bhh')_l = 3\mu\sum_{j,k=1;j,k\neq m}^{\infty}\alpha_{mjkl}h_jh'_k$$

$$(Chh'h'')_l = \mu\sum_{r,k,j=1;r,k,j\neq m}^{\infty}\alpha_{rkjl}h_rh'_kh''_j .$$

Die Operatoren L,B,C hängen nicht von ς ab und sind symmetrisch bzgl. des Skalarprodukts

$$(h,h') := \sum_{j=1;j\neq m}^{\infty}h_jh'_j.$$

h_o ist gegeben durch $h_{ol}=\mu\delta_{l,3m}/2\pi$. Da $A(\varsigma)$ lokal um $\varsigma=0$ invertierbar ist, wird Gleich. (A1) geschrieben als

$$h = y^3A^{-1}(\varsigma)h_o - y^2A^{-1}(\varsigma)Lh - yA^{-1}(\varsigma)Bh^2 - A^{-1}(\varsigma)Ch^3. \tag{A2}$$

Aus (A2) folgt für die Lösung $h=\hat{h}(y,\varsigma)$ von (A2), daß $\hat{h}(0,\varsigma)=\partial\hat{h}(0,\varsigma)/\partial y=0$. Daher Entwicklung von $\hat{h}$ nach Potenzen von y:

$$\hat{h}(y,\varsigma) = \sum_{j=2}^{\infty}h_j(\varsigma)y^j, \tag{A3}$$

wobei $h_j(\varsigma)=(h_{j1}(\varsigma),\ldots,h_{j,m-1}(\varsigma),h_{j,m+1}(\varsigma),\ldots)$, $j\geq 2$. Einsetzen von (A3) in (A2) ergibt durch Koeffizientenvergleich, daß

$$h_2(\varsigma) = h_4(\varsigma) = h_6(\varsigma) = h_8(\varsigma) = 0 \tag{A4a}$$

$$h_3(\varsigma) = A^{-1}(\varsigma)h_o \tag{A4b}$$

$$h_5(\varsigma) = -A^{-1}(\varsigma)LA^{-1}(\varsigma)h_o \tag{A4c}$$

$$h_7(\varsigma) = A^{-1}(\varsigma)(LA^{-1}(\varsigma))^2h_o - A^{-1}(\varsigma)B(A^{-1}(\varsigma)h_o)^2 \tag{A4d}$$

$$\begin{aligned} h_9(\varsigma) = &- A^{-1}(\varsigma)(LA^{-1}(\varsigma))^3h_o + A^{-1}(\varsigma)LA^{-1}(\varsigma)B(A^{-1}(\varsigma)h_o)^2 \\ &+ 2A^{-1}(\varsigma)B(A^{-1}(\varsigma)h_o)(A^{-1}(\varsigma)LA^{-1}(\varsigma)h_o) - A^{-1}(\varsigma)C(A^{-1}(\varsigma)h_o)^3, \end{aligned} \tag{A4e}$$

und für die h_j mit $j>9$ erhält man das rekursive System

$$h_j(\varsigma) = -A^{-1}(\varsigma)Lh_{j-2}(\varsigma) - \sum_{\substack{k+l=j-1\\k,l\geq 3}}A^{-1}(\varsigma)Bh_k(\varsigma)h_l(\varsigma) - \sum_{\substack{k+l+r=j\\k,l,r\geq 3}}A^{-1}(\varsigma)Ch_k(\varsigma)h_l(\varsigma)h_r(\varsigma) \tag{A5}$$

Aus (A4) und (A5) folgt $h_{2n}(\varrho)=0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$\hat{h}(y,\varrho) = \sum_{j=1}^{\infty} h_{2j+1}(\varrho) y^{2j+1}, \qquad (A6)$$

wobei $h_3(0)=h_o/\Upsilon_{3m}(\lambda_m,\mu)$. Mit (5.15) und (5.18) kann g durch Multilinearformen dargestellt werden:

$$g(y,\varrho,0) = -m^2\varrho y^2 + d_o y^4 + \tfrac{1}{2}(A(\varrho)\hat{h}(y,\varrho),\hat{h}(y,\varrho)) + y^2 B_1\hat{h}^2(y,\varrho) + yC_1\hat{h}^3(y,\varrho) + D\hat{h}^4(y,\varrho), \qquad (A7)$$

mit einer Linearform L_1, einer Bilinearform B_1, einer 3-Linearform C_1 und einer 4-Linearform D_1,

$$L_1 h = \mu \sum_{l=1;\, l\neq m}^{\infty} \alpha_{mmml} h_l, \quad B_1 h^2 = \tfrac{1}{2}(Lh,h), \quad C_1 h^3 = \tfrac{1}{3}(Bh^2,h), \quad Dh^4 = \tfrac{1}{4}(Ch^3,h).$$

Aus (A6) und (A7) folgt, daß

$$g(y,\varrho,0) = -m^2\varrho y^2 + d_o y^4 + \sum_{j=3}^{\infty} \hat{g}_j(\varrho) y^{2j}, \qquad (A8)$$

mit analytischen Funktionen $\hat{g}_j(\varrho)$, $\hat{g}_3(0)=-d_2$.

Anhang B. Ableitung von Gleich. (5.40):

Setze $h=(h_1,\ldots,h_{m-1},h_{m+2},h_{m+3},\ldots)$. Das Gleichungssystem (5.33) wird für $\Upsilon=0$ nach Division durch $\mu_m+\chi$ in Operatorform geschrieben:

$$A(\varrho,\chi)h + x^3 h^o_{30} + y^3 h^o_{03} + x^2 y h^o_{21} + xy^2 h^o_{12} + x^2 L_{20}h + 2xyL_{11}h + y^2 L_{02}h + xB_1h^2 + yB_2h^2 + Ch^3 = 0, \qquad (B1)$$

wobei $A(\varrho,\chi)$ der lineare Operator

$$(A(\varrho,\chi)h)_l := (\mu_m+\chi)^{-1}(\Upsilon_l(\lambda_m,\mu_m) - 2l^2\varrho + \chi)h_l$$

ist. Die L_{ik} (i+k=2) sind lineare, die B_i (i=1,2) bilineare und C ist ein kubischer Operator,

$$(L_{20}h)_l = 3\sum_{k=1;\,k\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{mmkl} h_k, \quad (L_{11}h)_l = 3\sum_{k=1;\,k\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{m,m+1,kl} h_k,$$

$$(L_{02}h)_l = 3\sum_{k=1;\,k\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{m+1,m+1,kl} h_k, \quad (B_1hh')_l = 3\sum_{k,j=1;\,k,j\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{mkjl} h_k h'_j$$

$$(B_2hh')_l = 3\sum_{k,j=1;\,k,j\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{m+1,kjl} h_k h'_j, \quad (Chh'h'')_l = \sum_{\substack{r,k,j=1 \\ r,k,j\neq m,m+1}}^{\infty} \alpha_{rkjl} h_r h'_k h''_j,$$

und die h^o_{kj} (k+j=3) sind gegeben durch

$$h^o_{30,l} = -\delta_{l,3m}/2\pi, \quad h^o_{03,l} = -\delta_{l,3m+3}/2\pi, \quad h^o_{12,l} = 3(\delta_{l,m+2} - \delta_{l,3m+2})/2\pi,$$

$$h^o_{21,l} = \begin{cases} 3(\delta_{l,m-1} - \delta_{l,3m+1})/2\pi & \text{falls } m \geq 2 \\ -3\delta_{l4}/2\pi & \text{falls } m=1 \end{cases}.$$

Die Lösung $h=\hat{h}(x,y,\varrho,\chi)$ von (B1) wird nach Potenzen von (x,y) entwickelt,

$$\hat{h}(x,y,\varrho,\varkappa) = \sum_{l=3}^{\infty} \sum_{j+k=l;\,j,k\geq 0} h_{jk}(\varrho,\varkappa)x^j y^k, \tag{B2}$$

wobei $h_{jk}(\varrho,\varkappa)=(h_{jk,1}(\varrho,\varkappa),\ldots,h_{jk,m-1}(\varrho,\varkappa),h_{jk,m+2}(\varrho,\varkappa),\ldots)$ und $h_{jk}(\varrho,\varkappa) = -A^{-1}(\varrho,\varkappa)h^0_{jk}$ für $j+k=3$. Jedes h_{jk} mit $j+k=l\geq 4$ läßt sich rekursiv aus den h_{jk} mit $3\leq j+k\leq l-1$ berechnen und analog zum Anhang A überlegt man sich leicht, daß $h_{jk}=0$ falls $j+k$ gerade, d.h.

$$\hat{h}(x,y,\varrho,\varkappa) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j+k=2n+1} h_{jk}(\varrho,\varkappa)x^j y^k. \tag{B3}$$

Mit (5.36) kann g für $\tau=0$ durch Multilinearformen dargestellt werden,

$$g|_{\tau=0} = \tfrac{1}{2}(\varkappa-2m^2\varrho)x^2+\tfrac{1}{2}(\varkappa-2(m+1)^2\varrho)y^2+(d_0+\tfrac{3\varkappa}{8\pi})(x^4+y^4+4x^2y^2)+\tfrac{1}{4}(\mu_m+\varkappa)\{x^3L_{30}\hat{h} +3x^2yL_{21}\hat{h}+3xy^2L_{12}\hat{h}+y^3L_{03}\hat{h}+x^2B_{20}\hat{h}^2+2xyB_{11}\hat{h}^2+y^2B_{02}\hat{h}^2+xC_1\hat{h}^3+yC_2\hat{h}^3+D\hat{h}^4\}, \tag{B4}$$

mit Linearformen L_{jk} $(j+k=3)$, Bilinearformen B_{jk} $(j+k=2)$, 3-Linearformen C_1,C_2 und einer 4-Linearform D,

$$L_{30}h = 4\sum_{k=1;\,k\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{mmmk}h_k, \quad L_{03}h = 4\sum_{k=1;\,k\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{m+1,m+1,m+1,k}h_k,$$

$$L_{21} = 4\sum_{k=1;\,k\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{mm,m+1,k}h_k, \quad L_{12}h = 4\sum_{k=1;\,k\neq m,m+1}^{\infty} \alpha_{m,m+1,m+1,k}h_k,$$

$$B_{20}hh' = 2(L_{20}h,h'), \quad B_{11}hh' = 2(L_{11}h,h'), \quad B_{02}hh' = 2(L_{02}h,h'),$$

$$C_1hh'h'' = \tfrac{4}{3}(B_1hh',h''), \quad C_2hh'h'' = \tfrac{4}{3}(B_2hh',h''), \quad Dhh'h''h''' = (Chh'h'',h'''),$$

wobei

$$(h,h') := \sum_{k=1;\,k\neq m,m+1}^{\infty} h_k h'_k.$$

In $g(x,y,\varrho,\varkappa,0)$ tauchen demnach keine ungeraden Potenzen von (x,y) auf, d.h. keine Terme der Form x^jy^k mit $j+k$ ungerade. Unter Verwendung der Tatsache, daß α_{nkjl} für alle $n,k,j,l\in\mathbb{N}$ nur dann von Null verschieden ist, wenn

$$n=k+j+l,\ n=k+j-l,\ n=k-j+l,\ n=j+l-k,\ n=k-l-j,\ n=l-k-j,\ n=j-k-l,$$

läßt sich mit etwas Rechenaufwand durch vollständige Induktion zeigen, daß

$L_{30}h_{jk}=0$ für j gerade, $L_{21}h_{jk}=0$ für j ungerade, $L_{12}h_{jk}=0$ für j gerade,

$L_{03}h_{jk}=0$ für j ungerade, $B_{20}h_{j_1k_1}h_{j_2k_2}=0$ für j_1+j_2 ungerade, $B_{11}h_{j_1k_1}h_{j_2k_2}=0$ für j_1+j_2 gerade, $B_{02}h_{j_1k_1}h_{j_2k_2}=0$ für j_1+j_2 ungerade, $C_1h_{j_1k_1}h_{j_2k_2}h_{j_3k_3}=0$ für $j_1+j_2+j_3$ gerade, $C_2h_{j_1k_1}h_{j_2k_2}h_{j_3k_3}=0$ für $j_1+j_2+j_3$ ungerade, (B5)

$Dh_{j_1k_1}h_{j_2k_2}h_{j_3k_3}h_{j_4k_4}=0$ für $j_1+j_2+j_3+j_4$ ungerade.

Aus (B4) und (B5) folgt, daß alle Terme von $g(x,y,\varrho,\varkappa,0)$ der Form x^jy^k mit j oder k ungerade verschwinden, d.h. es gilt Gleich. (5.40) mit einer analytischen Funktion $\hat{g}(x^2,y^2,\varrho,\varkappa)$.

LITERATUR

[1]: R. Thom, "Structural Stability and Morphogenesis", Benjamin, New York 1975.

[2]: E.C. Zeeman, "Catastrophe Theory, Selected Papers 1972-1977", Advanced Book Program Reading, Addison-Wesley 1977.
T. Poston and I. Stewart,"Catastrophe Theory and its Applications", Pitman 1978.
W. Güttinger, "Catastrophe Geometry in Physics and Biology", in "The Physics and Mathematics of the Nervous System", M. Conrad et al. (Eds.), Lecture Notes in Biomathematics 4, Springer 1974.

[3]: V. Arnold, "Unimodal Critical Points of Functions", Funct. Anal. Appl. 7 (1973), 230.

[4]: J. Mather, "Stability of C^∞ mappings: III. Finitely determined map germs", Publ. Math. IHES 35 (1968), 127.

[5]: G. Wassermann, "Stability of Unfoldings", Lecture Notes in Mathematics 393, Springer 1974.

[6]: T. Bröcker, "Differentiable Germs and Catastrophes", Lond. Math. Soc. Lect. Not. Ser. 17, Cambridge University Press 1975.

[7]: Yung-Chen Lu, "Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory", Springer 1976.

[8]: J.J. Duistermaat, "Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfoldings of Singularities", Comm. Pure Appl. Math. XXVII (1974), 207.

[9]: V. Arnold, "Normal Forms for Functions near Degenerate Critical Points, the Weyl Groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian Singularities", Funct. Anal. Appl. 6 (1972), 254.

[10] V. Arnold, "Critical Points of Smooth Functions", in "Proceedings of the International Congress of Mathematicians", Vol. I, Vancouver 1974.

[11]: V. Arnold, "Remarks on the Stationary Phase Mathod and Coxeter Numbers", Russ. Math. Surveys 28 (1973), 19.

[12]: D. Gromoll and W. Meyer, "On Differentiable Functions with Isolated Critical Points", Topology 8 (1969), 361.

[13]: D. Sattinger, "Topics in Stability and Bifurcation Theory", Lecture Notes in Mathematics 309, Springer 1973.
D. Sattinger, "Six Lectures on the transition to instability", in "Nonlinear Problems in the Physical Sciences and Biology", I. Stakgold et al. (Eds.), Lecture Notes in Mathematics 322, 261, Springer 1973.

[14]: J. Keener and H. Keller, "Perturbed Bifurcation Theory", Arch. Rat. Mech. Anal. 50 (1973), 159.

[15]: M. Vainberg, "Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators", Holden-Day, Inc., 1964.

[16]: R. Tapia, "The Differentiation and Integration of Nonlinear Operators", in "Nonlinear Functional Analysis and Applications", L. Rall (Ed.), Academic Press 1971, 45.

[17]: S. Lang, "Differential Manifolds", Addison-Wesley 1972.

[18]: M. Vainberg and V. Trenogin, "Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations", Noordhoff 1974.

[19]: A. Voigt und J. Wloka, "Hilberträume und elliptische Differentialoperatoren", BI 1974.

[20]: R. Palais, "Morse Theory on Hilbert Manifolds", Topology 2 (1963), 299.

[21]: H. Keller and W. Langford, "Iterations, perturbations and multiplicities in nonlinear bifurcation problems", Arch. Rat. Mech. Anal. 43 (1972), 83.

[22]: J. Keener and H. Keller, "Perturbed Bifurcation and Buckling of Circular Plates", in "Conference on the Theory of Ordinary and Partial Differential Equations", W. Everitt and B. Sleeman (Eds.), Lecture Notes in Mathematics 280, 286, Springer 1972.

[23]: J. Keener, "Buckling Imperfection Sensitivity of Columns and Spherical Caps", Quaterly of Appl. Math., July 1974.

[24]: I. Segal, "Nonlinear Semi-Groups", Annals of Math. 78 (1963), 339.

[25]: S. Krein, "Linear Differential Equations in Banach Space", Translations of Math. Monographs 29, Amer. Math. Soc. 1971.

[26]: S. Mizohata, "The theory of partial differential equations", Cambridge University Press 1973.

[27]: R. Adams, "Sobolew-Spaces", Academic Press 1975.

[28]: C. Morrey, Jr., "Multiple Integrals in the Calculus of Variations", Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellung, Bd. 130, Springer 1966.

[29]: I.M. Gelfand and G.E. Shilov, "Generalized Functions", Vol. I, Academic Press 1964.

[30]: M. Reed and B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics, Vol.I: Functional Analysis", Academic Press 1972.

[31]: P.R. Halmos, "Measure Theory", Van Nostrand Reinhold 1950.

[32]: G. Fichera, "Linear elliptic systems and eigenvalue problems", Lecture Notes in Mathematics 8, Springer 1965.

[33]: J. Lions and E. Magenes, "Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications", Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellung, Bd. 181, Springer 1972.

[34]: S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, "Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations I,II", Comm. Pure Appl. Math. XII (1959), 623; Comm. Pure Appl. Math. XVII (1964), 35.

[35]: S. Agmon, "On the Eigenfunctions and on the Eigenvalues of General Elliptic Boundary Value Problems", Comm. Pure Appl. Math. XV (1962), 119.

[36]: F. Browder, "Functional Analysis and Partial Differential Equations I,II", Math. Annalen 138 (1959), 55; Math. Annalen 145 (1963), 862.

[37]: F. Browder, "Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems", Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 862.

[38]: O. Ladyzhenkaya and N. Ural'tseva, "Linear and Quasilinear Elliptic Equations", Academic Press 1968.

[39]: L. Landau und E. Lifschitz, "Theoretische Physik" Bd. VII (Elastizitätstheorie), Akademie-Verlag Berlin 1970.

[40]: J. Thompson and G. Hunt, "A General Theory of Elastic Stability", Wiley-Interscience 1973.

[41]: R. Courant und D. Hilbert, "Methoden der Mathematischen Physik I", Springer 1968.

[42]: G. Pimbley, Jr., "Eigenfunction Branches of Nonlinear Operators and their Bifurcations", Lecture Notes in Mathematics 104, Springer 1969.

[43]: I. Gyarmati, "Non-equilibrium Thermodynamics, Field Theory and Variational Principles", Springer 1970.

[44]: S. DeGroot und P. Mazur, "Grundlagen der Thermodynamik irreversibler Prozesse", BI-Hochschultaschenbücher 162/162a, BI 1961.

[45]: D. Edelen, "A nonlinear Onsager Theory of Irreversibility", Intern. Journ. Engng. Sci. 10 (1972), 481.

[46]: P. Glansdorff and I. Prigogine, "Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations", Wiley-Interscience 1971.

[47]: F. Schlögl, "Zur statistischen Thermodynamik um einen stationären Zustand", Vorlesungen am Max Planck-Institut für Biophysikalische Chemie, Göttingen 1972.

[48]: E. Pfaffelhuber, "Information Theoretic Stability and Evolution Criteria in Irreversible Thermodynamics", Journ. of Statistical Physics 16 (1977), 69.

[49]: H. Rund, "The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations", Van Nostrand Comp. Ltd. 1966.

[50]: C. DeWitt-Morette, "The small Disturbance Equation: Caustics and Catastrophes", University of Texas at Austin, Preprint 1975.

[51]: R. Feynman and A. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals", McGraw Hill 1965.

[52]: W. Miller, "Classical-Limit Quantum Mechanics and the Theory of Molecular Collisions", Adv. Chem. Phys. 25 (1974), 69.

[53]: T. Koeling and R. Malifet, "Semiclassical Approximations to Heavy Ion Scattering Based on the Feynman Path-Integral Method", Phys. Rep. C 22 (1975), 181.

[54]: R. Dashen, B. Haslacher and A. Neveu, "Non-Perturbative Methods and Extended Hadron Models in Field Theory I,II", I: "Semi-Classical Functional Methods", Phys. Rev. D 10 (1974), 4114; II: "Two-Dimensional Models and Extended Hadrons", Phys. Rev. D 10 (1974), 4130.
R. Dashen, B. Haslacher and A. Neveu, "Particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques", Phys. Rev. D 11 (1975), 3424.

[55]: W. Campbell et al., "Path Integrals with Arbitrary Generators and the Eigenfunction Problem", Annals of Physics 96 (1976), 286.

[56]: M. Gutzwiller, "Phase-Integral Approximation in Momentum Space and the Bound States of an Atom", Journ. of Math. Phys. 8 (1967), 1979.

[57]: W. Pauli, "Ausgewählte Kapitel aus der Feldquantisierung", Lecture Notes, Zürich 1951.

[58]: C. Morette, "On the definition and approximation of Feynman's path integrals", Phys. Rev. 81 (1951), 848.

[59]: M. Berry and K. Mount, "Semiclassical approximations in wave mechanics", Rep. Prog. Phys. 35 (1972), 315.

[60]: L. Schulman, "Caustics and Multivaluedness: Two Results of Adding Path Amplitudes", in "Functional Integration and its Applications", A. Arthurs (Ed.), Oxford 1975, 144.

[61]: B. Davison, "On Feynman's integral over all paths", Proc. Roy. Soc. London Ser. A 225 (1954), 252.

[62]: H. Davies, "Summation over Feynman Histories: The Free Particle and the Harmonic Oscillator", Proc. Cambr. Phil. Soc. 53 (1957), 199.

[63]: M. Glasser, "Summation over Feynman Histories: Charged Particle in a Uniform Magnetic Field", Phys. Rev. B 133 (1964), 831.

[64]: S. Levit and U. Smilansky, "A new Approach to Gaussian Path Integrals and the Evaluation of the Semiclassical Propagator", Annals of Phys. 103 (1977), 198.

[65]: S. Levit and U. Smilansky, "A Theorem on Infinite Products of Sturm-Liouville Type Operators", Weizmann Institute of Sciences, WIS-76/3-Ph, Preprint, Rehovot, Israel, 1976.

[66]: M. Berry, "Waves and Thom's Theorem", Adv. Phys. 25 (1976), 1.

[67]: W. Miller, "Classical S Matrix: Numerical Application to Inelastic Collisions", Journ. Chem. Phys. 53 (1970), 3578.

[68]: A. Halany, "Differential Equations", Math. in Science and Eng., Vol. 23, Academic Press 1966.

[69]: E. Coddington and N. Levinson, "Theory of Ordinary Differential Equations", McGraw Hill 1955.

[70]: P. Morse and H. Feshbach, "Methods of Theoretical Physics", part I, McGraw Hill 1953.

[71]: H. Poincare, "Sur les groupes des équations linéaires", Acta Mathematica 4 (1884), 201.

[72]: J. Tarski, "Definitions and Selected Applications of Feynman-Type Integrals", in "Functional Integration and its Applications", A. Arthurs (Ed.), Oxford 1975, 169.

[73]: J. Gelfand and A. Yaglom, "Integration in Functional Spaces and its Applications in Quantum Physics", Journ. Math. Phys. 1 (1962), 48.

[74]: R. Cameron, "The Ilstow and Feynman integrals", Journ. anal. Math. 10 (1962), 287.

[75]: G. Papadopoulos, "Gaussian path integrals", Phys. Rev. D 11 (1975), 2870.

[76]: C. DeWitt-Morette, "Feynman Path Integrals", Comm. Math. Phys. 28 (1972), 47.
C. DeWitt-Morette, "Path Integrals in Riemannian Manifolds", "International Symposium on Math. Problems in Theoretical Physics", in H. Araki (Ed.), Lecture Notes in Physics 39, Springer 1975.
C. DeWitt-Morette, "The Semi-Classical Expansion", University of Texas at Austin, Preprint, 1976.

[78]: A. Balakrishnan, "Applied Functional Analysis", Springer 1976.

[79]: G. Dangelmayr and W. Veit, "Semiclassical Approximation of Path Integrals on and near Caustics in Terms of Catastrophes", Annals of Physics 1979, in print.

[80]: E. Copson, "Asymptotic Expansions", Cambridge University Press 1965.

[81]: C. Chester, B. Friedman and F. Ursell, "An Extension of the Method of Steepest Descents", Proc. Cambr. Phil. Soc. 53 (1957), 599.

[82]: R. Buchal and J. Keller, "Boundary Layer Problems in Diffraction Theory", Comm. Pure Appl. Math. XIII (1960), 85.

[83]: D. Ludwig, "Uniform Asymptotic Expansions at a Caustic", Comm. Pure Appl. Math. XIX (1966), 215.

[84]: M. Berry, "Focusing and twinkling: Critical exponents from catastrophes in non-Gaussian random short waves", Journ. Phys. A 10 (1977), 2061.

[85]: J. Connor and R. Marcus, "Theory of Semiclassical Transition Probabilities for Inelastic and Reactive Collisions II: Asymptotic Evaluation of the S-Matrix", Journ. Chem. Phys. 55 (1971), 5636.

[86]: S. Coyne, "Semi-Classical Asymptotic Evaluation of Feynman Path Integrals", Ph. D. Thesis, Indiana University, Bloomington 1972.

VERZEICHNIS DER VERWENDETEN SYMBOLE

δ_{ik}: Kroneckersymbol

$\emptyset$: Leere Menge

$\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0$: Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen

$\mathbb{R}$: Körper der reellen Zahlen

$\mathbb{R}_+$: Menge der nichtnegativen reellen Zahlen

Für $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, setze: $[a,b]:=\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $]a,b]:=\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, $[a,b[:=\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $]a,b[:=\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

$\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$: n-dimensionaler euklidischer, reeller Vektorraum

$|x|$: Euklidische Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$

$\bar{\Omega}$: Abschluß der Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$\mathring{\Omega}$: Inneres der Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$\partial\Omega:=\bar{\Omega}/\mathring{\Omega}$: Rand der Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$\mathrm{mes}\Omega$: Lebesgue'sches Maß einer meßbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$\mathcal{M}(n,m)$ $(n,m \in \mathbb{N})$: Menge der reellen nxm-Matritzen, die Komponenten einer Matrix $A \in \mathcal{M}(n,m)$ werden mit A_{ij} bezeichnet, wobei i $(1 \leq i \leq n)$ der Zeilenindex und j $(1 \leq j \leq m)$ der Spaltenindex ist.

A^T: Transponierte Matrix zu $A \in \mathcal{M}(n,m)$

TrA: Spur einer quadratischen Matrix A

detA: Determinante einer quadratischen Matrix A

E_n $(n \in \mathbb{N})$: nxn-Einheitsmatrix

Multiindices:

(1) Als (n-) Multiindex $(n \in \mathbb{N})$ werden n-tupel $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, bezeichnet. Setze:

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ , \quad \alpha! := \prod_{i=1}^{n} \alpha_i! \ .$$

(2) Sei $x=(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ein Multiindex. Setze:

$$x^\alpha := \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

(3) Sei $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ bis zur Ordnung $k \in \mathbb{N}_0$ partiell differenzierbar und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sei ein Multiindex mit $|\alpha| \leq k$. Die folgende Schreibweise für partielle Ableitungen wird verwendet:

$$\partial^\alpha f(\bar{x}) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(\bar{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Bezeichnungen aus der Funktionalanalysis:

B, B_1, B_2 seien reelle Banachräume.

B^*: Dualraum von B

B^n $(n \in \mathbb{N})$: Kartesisches Produkt $B \times \cdots \times B$, mit der üblichen Produkttopologie versehen

$\mathcal{L}(B_1, B_2)$: Banachraum der stetigen, linearen Operatoren von B_1 nach B_2

Es sei $T \in \mathcal{L}(B_1^n, B_2)$ $(n \in \mathbb{N})$, $u_1, \ldots, u_k \in B_1$ $(1 \leq k \leq n)$ und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ sei ein Multiindex mit $|\alpha| = n$. Die folgende Schreibweise wird verwendet:

$$T u_1^{\alpha_1} \ldots u_k^{\alpha_k} := T(\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{\alpha_1\text{-mal}}, \underbrace{u_2, \ldots, u_2}_{\alpha_2\text{-mal}}, \ldots, \underbrace{u_k, \ldots, u_k}_{\alpha_k\text{-mal}})$$

$\mathcal{L}_s(B_1^n, B_2)$ $(n \in \mathbb{N})$: Abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{L}(B_1^n, B_2)$ aller symmetrischen, stetigen, n-linearen Operatoren von B_1 nach B_2, d.h. für $T \in \mathcal{L}_s(B_1^n, B_2)$ und $u_1, \ldots, u_n \in B_1$ gilt

$$T u_1 \ldots u_n = T u_{\tau(1)} \cdots u_{\tau(n)}$$

für alle Permutationen $(1, \ldots, n) \longrightarrow (\tau(1), \ldots, \tau(n))$.

LEBENSLAUF

6.4.1951	Geboren in Stuttgart als Sohn des Ingenieurs Walter Dangelmayr und dessen Ehefrau Elisabeth, geb. Auber
1957 - 1961	Grundschule in Fellbach
1961 - 1969	Friedrich-Schiller-Gymnasium in Fellbach
12.6.1969	Abitur
Okt. 1969 - Febr. 1970	Immatrikuliert an der Technischen Universität Claustal in Claustal-Zellerfeld im Fach Physik
ab Okt. 1970	Immatrikuliert an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen im Fach Physik
27.2.1973	Diplom-Vorprüfung
ab Juli 1974	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Informationsverarbeitung
15.10.1975	Diplom-Hauptprüfung
November 1975	Aufnahme in die Liste der Doktoranden, Leiter der Arbeit: Prof. Dr. W. Güttinger am Institut für Informationsverarbeitung
ab Febr. 1977	Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Informationsverarbeitung
Dezember 1978	Abschluß der Arbeit

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren Baumann, Beekmann, Betsch, Braitenberg, Conrad, Dähn, Dal Cin, Elwert, Gönnenwein, Güttinger, Hadeler, Kalus, Kramer, Krüger, Lenz, Mack, Möllenstedt, Mitter, Pfaffelhuber, Rüdorff, Schäfer, Schmid, Speidel, Stumpf, Wildermuth, Wolf.

Druck und Gesamtherstellung:

Bölk & Schulz · Kopier- und Drucktechnik
Bismarckstr. 92
7400 Tübingen · Tel. 07071/32321